詳細解答

STEP II 2020，第 2 題

純數學 • 可分離變量微分方程

> **STEP II 2020，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

這條微分方程（differential equation）可以分離變量（separation of variables）；積分之後，最自然要考察的是乘積 xy，而它原來是 2 的冪。接着利用恆等式（identity）$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$，便可把一切改寫成以和 $s=x+y$ 及差 $d=x-y$ 表示。在這兩個變量下，每條曲線都變成「d^2 等於某個 s 的函數」，而描繪曲線的關鍵，就在於找出該函數在哪裏非負。

解答

第 (i) 部分

先把右方因式分解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-ky}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{kx-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

積分得 $\ln|y|-ky=kx-\ln|x|+c$，即

$$\ln|xy|=k(x+y)+c.$$

在兩條曲線上，x 與 y 皆同號，所以 $|xy|=xy$。由於 $k=\ln 2$，取指數得 $xy=A\,2^{x+y}$，其中 A 為正常數。

曲線 C_1。在 $(1,1)$ 處得 $1=4A$，所以 $A=\frac{1}{4}$，且 $4xy=2^{x+y}$。又 $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$，故

$$(x-y)^2=(x+y)^2-2^{x+y},$$

其中 $x,y>0$。這就是所求的結果。

曲線 C_2。在 $(-1,-1)$ 處得 $1 = A\cdot 2^{-2}$，所以 $A=4$，且 $4xy = 16\cdot 2^{x+y} = 2^{x+y+4}$。因此

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 2^{x+y+4},$$

其中 $x, y < 0$。

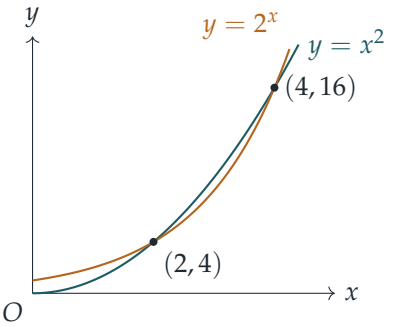
對稱性。把 x 與 y 互換，$x+y$ 不變，$(x-y)^2 = (y-x)^2$ 亦不變，所以每條方程都不變。符號條件（$x,y>0$ 或 $x,y<0$）同樣不變。因此只要 (a,b) 在曲線上，它關於 $y=x$ 的反射點 (b,a) 也在曲線上。故 $y=x$ 是每條曲線的對稱軸（line of symmetry）。

第 (ii) 部分

當 $x \geq 0$ 時，曲線 $y=x^2$ 與 $y=2^x$ 相交於 $(2,4)$ 及 $(4,16)$，而且只有這兩個交點。要說明這一點，可比較對數：設 $x>0$ 時 $g(x) = 2\ln x - x\ln 2$。則 $g'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2$，所以 g 在 $x = 2/\ln 2$ 之前遞增，之後遞減。因此 g 至多有兩個零點，而 $g(2) = g(4) = 0$。故

$$x^2 \geq 2^x \iff 2 \leq x \leq 4 \qquad (x>0),$$

而在 $[0,2)$ 及 $(4,\infty)$ 上，2^x 位於 x^2 之上。



現在取 C_1 上一點，並設 $s = x+y > 0$。C_1 方程的左方是一個平方，所以

$$s^2 - 2^s = (x-y)^2 \geq 0, \qquad \text{即} \qquad s^2 \geq 2^s.$$

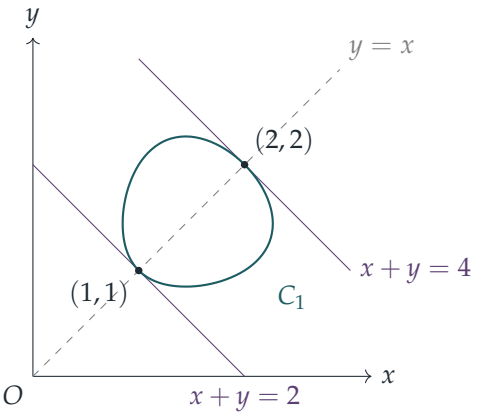
由上圖可見，這迫使 $2 \leq s \leq 4$。所以 C_1 位於直線 $x+y=2$ 與 $x+y=4$ 之間。

> **想一想** $[2,4]$ 中每一個 s 值是否真的都能取到？曲線在兩端又是甚麼樣子？

對每個 $s \in [2,4]$，設 $d = \pm\sqrt{s^2 - 2^s}$，以及 $x = \frac{1}{2}(s+d)$、$y = \frac{1}{2}(s-d)$。由於 $2^s > 0$，有 $|d| < s$，所以 x 與 y 皆為正。因此每個這樣的 s 都對應 C_1 上的點，當 $2 < s < 4$ 時更對應兩點。所以這條曲線是一個閉環：

- 當 $s = 2$ 及 $s = 4$ 時 $d = 0$，得出 $y = x$ 上的點 $(1,1)$ 及 $(2,2)$。兩點都滿足 $kxy - y = -(x - kxy)$，所以該處的斜率 (gradient) 為 -1。閉環在這兩點分別與直線 $x + y = 2$ 及 $x + y = 4$ 相切。
- 在 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ 處斜率為 0，在 $y = 1/\ln 2$ 處斜率為無窮大。在 $x = 1/\ln 2$ 處，閉環上有 $y \approx 0.85$（最低點）及 $y \approx 2.27$（最高點）。
- 它橫跨 $y = x$ 的最大寬度出現在 $s^2 - 2^s$ 取最大值之處，即 $s \approx 3.21$，此時 $|d| \approx 1.02$。

這個閉環是一個卵形，關於 $y = x$ 對稱，夾在兩條直線之間：



第 (iii) 部分

現在 $s = x + y < 0$。設 $t = -s > 0$。與之前一樣，我們需要

$$s^2 \geq 2^{s+4} \iff t^2 \geq 2^{4-t} \iff t^2 2^t \geq 16.$$

函數 $t^2 2^t$ 在 $t > 0$ 時遞增，且在 $t = 2$ 時等於 16。所以條件是 $t \geq 2$，即 $x + y \leq -2$。(等價地，在 $x < 0$ 時描繪 $y = x^2$ 與 $y = 2^{x+4}$，只有當 $x \leq -2$ 時拋物線才在上方。) 對每個 $s \leq -2$，用與 (ii) 相同的構造可得兩個滿足 $x, y < 0$ 的點，唯獨 $s = -2$ 只給出單一點 $(-1,-1)$。所以這次 C_2 是無界的：

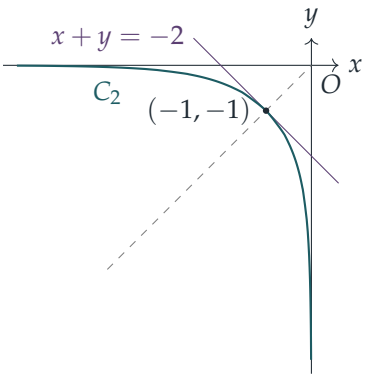
- 它只在 $(-1,-1)$ 與 $y = x$ 相交，該處斜率同樣是 -1，所以它在該點與直線 $x + y = -2$ 相切。
- 當 $x, y < 0$ 時，$kx - 1 < 0$ 且 $1 - ky > 0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} < 0,$$

因為分子為正而分母為負。所以隨着 x 增加，y 持續遞減。

- 由 $xy = 4 \cdot 2^{x+y}$：當 $x \to -\infty$ 時，乘積 xy 趨向 0，所以 $y \to 0^-$（事實上 $y \approx 4 \cdot 2^x / x$）。由對稱性，當 $x \to 0^-$ 時 $y \to -\infty$。負半軸都是漸近線（asymptote）。

所以 C_2 看起來像第三象限中直角雙曲線（rectangular hyperbola）的一支，但它貼近坐標軸的程度緊密得多：



驗算

- 對 $4xy = 2^{x+y}$ 作隱函數求導（implicit differentiation）：$4y + 4xy' = k\,2^{x+y}(1 + y') = 4kxy(1 + y')$。整理後得 $y' = \dfrac{kxy - y}{x - kxy}$，正是原方程。$C_2$ 的情況同樣成立。
- $(2,2)$ 在 C_1 上：$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$。在 C_2 上，滿足 $x + y = -4$ 的點約為 $(-3.936, -0.064)$，此時 $xy \approx 0.252$，而 $4 \cdot 2^{-4} = 0.25$。上文所引卵形的極端點已用電腦核實。

常見錯誤

- 積分 $1/x$ 和 $1/y$ 時忘記加上絕對值符號（modulus）。對 C_2 而言這一點很重要，常數應得 $A = 4$，而不是 $\frac{1}{4}$。
- 只證明 $(x + y)^2 \geq 2^{x+y}$ 便停下來。你還必須解釋為何這把 $x + y$ 限制在 $[2, 4]$ 之內，而這正是 x^2 與 2^x 的比較圖派上用場之處。
- 把 C_2 畫成穿過坐標軸。在 C_2 上兩個坐標都保持為負，而坐標軸是漸近線。

STEP 之外

把坐標轉換為 $s = x + y$、$d = x - y$，可將一條對稱的方程化為「$d^2 = f(s)$」。曲線恰好存在於 $f(s) \geq 0$ 之處：若該集合是有界區間，曲線便是閉環；若是半直線，曲線便是

無界的。同樣的推理可以從守恆量（conserved quantity）描繪相圖（phase portrait）：$\ln(xy) - k(x+y)$ 沿每條解都是常數，正如 Lotka–Volterra 捕食者—獵物方程（predator–prey equations）中的能量一樣；該方程的軌道也正因同樣的理由而是閉環。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋了這兩個概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。