詳細解答

STEP II 2020，第 12 題

概率與統計 • 不公平骰子的不等式

> **STEP II 2020，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

各概率（probability）之和必須等於 1，所以各偏差（bias）滿足 $\sum \varepsilon_i = 0$。把這一點寫下來之後，展開 $\sum(\frac{1}{n} + \varepsilon_i)^2$ 時所有一次項都會消失，剩下的式子一眼就看得出是非負的。第 (ii) 部分其實是第 (i) 部分換了個樣子：把一組正數各自除以它們的總和，就得到某顆骰子（die）的各個概率。

解答

設 $p_i = \mathrm{P}(X = i) = \frac{1}{n} + \varepsilon_i$。由於 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，

$$1 = n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0.$$

另外每個 $p_i \geq 0$，所以對每個 i 都有 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$。以下所有求和都是對 $i = 1, \ldots, n$ 進行。

第 (i) 部分

兩次擲骰是獨立（independent）的，所以兩次都擲出 i 的概率是 p_i^2，而對不同的 i，這些事件互斥（disjoint）。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{兩次點數相同}) &= \sum p_i^2 = \sum \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2\varepsilon_i}{n} + \varepsilon_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum \varepsilon_i + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2.\end{aligned}$$

對公平的骰子，每個 $\varepsilon_i = 0$，概率為 $\frac{1}{n}$。對有偏差的骰子，ε_i 不全為零，所以 $\sum \varepsilon_i^2 > 0$。因此，有偏差的骰子在連續兩次擲骰中擲出相同點數的可能性，高於公平的骰子。

第 (ii) 部分

先改寫這個二重和。它把所有 $j < i$ 的 $x_i x_j$ 加起來，也就是說，每一對不同下標組成的無序對恰好加一次。把 $S = \sum x_i$ 平方，會得到每個 x_i^2 各一次，以及每個這樣的無序對各兩次，所以

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right).$$

? **想一想** 當 x_i 只是任意的正數時，骰子從何而來？

設 $p_i = x_i/S$。這些數都是正數，而且總和為 1，所以它們是某顆 n 面骰子的各個概率。由第 (i) 部分，$\sum p_i^2 = \frac{1}{n} + \sum \varepsilon_i^2 \geq \frac{1}{n}$（等號成立當且僅當骰子是公平的，即所有 x_i 相等）。兩邊乘以 $S^2 > 0$，

$$\sum x_i^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

因此

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{S^2}{n}\right) = \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

這正是所求的不等式（inequality）。當所有 x_i 相等時，等號成立。

第 (iii) 部分

現在概率是 $\sum p_i^3$。展開，並再次利用 $\sum \varepsilon_i = 0$，

$$\begin{aligned}\sum p_i^3 &= \sum\left(\frac{1}{n^3} + \frac{3\varepsilon_i}{n^2} + \frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) \\ &= \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) = \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right).\end{aligned}$$

對公平的骰子，這個值是 $\frac{1}{n^2}$。

? **想一想** 立方項 ε_i^3 可以是負數。它們會不會蓋過平方項？

不會，因為偏差不可能負得太多：由 $p_i \geq 0$ 得 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$，所以

$$\frac{3}{n} + \varepsilon_i \geq \frac{2}{n} > 0.$$

因此每一項 $\varepsilon_i^2\left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right)$ 都 ≥ 0，而且只要 $\varepsilon_i \neq 0$ 就嚴格大於零；對有偏差的骰子，至少有一個 i 滿足這個條件。所以

$$\sum p_i^3 > \frac{1}{n^2},$$

即有偏差的骰子在連續三次擲骰中擲出相同點數的可能性，同樣高於公平的骰子。

驗算

- 取 $n = 4$，各概率為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$，於是 $\varepsilon = \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}$。直接計算得 $\sum p_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} = \frac{1}{3}$，而 $\frac{1}{4} + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{3}{144} = \frac{1}{3}$，比公平骰子的 $\frac{1}{4}$ 大。擲三次時，$\sum p_i^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{216} = \frac{5}{36} \approx 0.139$，遠高於公平骰子的 $\frac{1}{16} = 0.0625$。
- 最極端的骰子總是擲出 1：這時兩個概率都是 1，即最大可能值。
- 在 (ii) 中，當 $n = 2$ 時不等式變成 $x_1 x_2 \le \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2$，這正是算術–幾何平均不等式（AM–GM）。(i)、(ii) 和 (iii) 中的不等式亦已用電腦在數以千計的隨機例子上驗證過。

常見錯誤

- 忘記 $\sum \varepsilon_i = 0$，結果留下一些正負號未知的一次項。
- 在 (iii) 中，沒有用 $\varepsilon_i \ge -\frac{1}{n}$，就斷言 $\sum \varepsilon_i^3$ 「很小」或可正可負；正是這個界令論證成立。
- 在 (ii) 中，把第 (i) 部分直接用在 x_i 本身，而不是用在 $x_i / \sum x_j$ 上；x_i 的總和不一定是 1。

STEP 之外

$\sum p_i^2$ 這個量稱為一個分佈的*碰撞概率*（collision probability），第 (i) 部分說明它在均勻分佈（uniform distribution）時最小；第 (iii) 部分則是關於 $\sum p_i^3$ 的同一結論。兩者都是函數 $t \mapsto t^k$ 的凸性（convexity）——即延森不等式（Jensen's inequality）——或冪平均不等式（power-mean inequality）的特例；而 $\sum p_i^k$ 的對數則給出資訊理論（information theory）和密碼學（cryptography）中使用的雷尼熵（Rényi entropy）。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）是在概率框架下認識這些概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。