詳細解答

STEP II 2020，第 11 題

概率與統計 • 擲硬幣中的游程

> **STEP II 2020，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

這個遊戲幾乎沒有「記憶」：任何時刻，重要的只是最近一次擲出哪一面，以及目前連續（run）的長度。特別地，一旦擲出的面改變，遊戲所處的局面就與「這新的一面是第一次投擲」完全相同。因此我們以第一次投擲為條件（conditioning），把「已知第一擲為正面時 A 獲勝的概率（probability）」用「已知第一擲為反面時 A 獲勝的概率」表示，反之亦然。這樣便得到兩條聯立線性方程（simultaneous linear equations）。

解答

全文假設 $0 < p < 1$。（若 $p = 0$ 或 $p = 1$，每次擲出的都是同一面，遊戲會在第二或第三次投擲時結束，答案是顯然的。）記

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{A 獲勝} \mid \text{第一擲為 H}), \qquad \beta = \mathrm{P}(\text{A 獲勝} \mid \text{第一擲為 T}).$$

各次投擲是獨立（independent）的，所以任何一次投擲之後發生的事，只取決於之後尚未進行的投擲。

第 (i) 部分

遊戲必定結束。擲了 n 次後遊戲仍未結束，當且僅當到目前為止沒有兩次相鄰投擲結果相同，即首 n 次投擲交替出現：$HTHT\ldots$ 或 $THTH\ldots$。當 $n = 2m$ 時，這兩個序列各含 m 個正面和 m 個反面，所以

$$\mathrm{P}(\text{擲 } 2m \text{ 次後仍未結束}) = 2p^m q^m = 2(pq)^m \le 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^m,$$

因為 $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$。事件「遊戲永不結束」包含於上述每一個事件之中，因此對每一個 m，它的概率至多為 $2\left(\frac{1}{4}\right)^m$；令 $m \to \infty$，即知這概率為 0。

已知第一擲為正面。考慮第二次投擲。

- 以概率 p 擲出正面，A 立即獲勝。
- 以概率 q 擲出反面。這時之前的正面已無關重要：B 還需要再多一個反面，A 需要連續兩個正面，情況與這個反面是第一次投擲完全一樣。所以此後 A 獲勝的概率為 β。

同理，若第一擲為反面，則第二擲為反面時 B 立即獲勝；第二擲為正面時，我們便處於「第一擲為正面」的局面。因此

$$\alpha = p + q\beta, \qquad \beta = p\alpha.$$

把第二條方程代入第一條，得 $\alpha = p + pq\,\alpha$，所以

$$\alpha = \frac{p}{1-pq},$$

正如所求（$1 - pq \geq \frac{3}{4} > 0$）。於是 $\beta = \dfrac{p^2}{1-pq}$。

整體概率。以第一次投擲為條件，

$$\mathrm{P}(\text{A 獲勝}) = p\alpha + q\beta = \frac{p^2 + p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

第 (ii) 部分

現在 α 和 β 指的是需要連續三次的遊戲。假設第一擲為正面。

- HH 之後再擲出 H，概率為 p^2：A 獲勝。
- HHT，概率為 pq；或 HT，概率為 q：自開局以來第一個反面剛剛出現，之前的正面不再計算，所以我們處於「第一擲為反面」的局面，A 獲勝的概率為 β。

這些情況涵蓋了所有可能，所以

$$\alpha = p^2 + (q + pq)\,\beta,$$

這正是題目所給的結果。把兩面的角色互換（在「第一擲為反面」的局面下，TTT 令 B 獲勝，對 A 的概率貢獻為 0），得

$$\beta = (p + pq)\,\alpha.$$

想一想 因子 $q+pq$ 和 $p+pq$ 怎樣變成 $1-p^2$ 和 $1-q^2$？

由於 $p+q=1$，我們有 $q+pq=q(1+p)=(1-p)(1+p)=1-p^2$，同理 $p+pq=p(1+q)=1-q^2$。這也可以直接理解：$1-p^2$ 是開局擲出正面後，接着兩次投擲不全是正面的概率，而這恰恰就是連續被打斷的情況。所以方程組為

$$\alpha = p^2 + (1-p^2)\beta, \qquad \beta = (1-q^2)\alpha,$$

代入後得 $\alpha\left[1-(1-p^2)(1-q^2)\right]=p^2$，即

$$\alpha = \frac{p^2}{1-(1-p^2)(1-q^2)}.$$

（分母為正，因為 $0<1-p^2<1$ 且 $0<1-q^2<1$。）最後，

$$\mathrm{P}(\text{A 獲勝}) = p\alpha + q\beta = \alpha\big(p+q(1-q^2)\big) = \alpha\left(p+q-q^3\right) = \alpha\left(1-q^3\right),$$

所以

$$\mathrm{P}(\text{A 獲勝}) = \frac{p^2(1-q^3)}{1-(1-p^2)(1-q^2)},$$

正如所求。

第 (iii) 部分

同樣的論證適用於長度為 a 和 b 的連續。已知第一擲為正面，要麼接着的 $a-1$ 次投擲全是正面（概率 p^{a-1}），A 獲勝；要麼其中出現反面（概率 $1-p^{a-1}$）。在後一情況下，遊戲就從那個反面重新開始，令我們處於「第一擲為反面」的局面。同理，已知第一擲為反面，B 以概率 q^{b-1} 獲勝，否則在 B 的連續完成之前會出現正面。所以

$$\alpha = p^{a-1} + \left(1-p^{a-1}\right)\beta, \qquad \beta = \left(1-q^{b-1}\right)\alpha,$$

因此

$$\alpha = \frac{p^{a-1}}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}.$$

分母同樣為正，因為兩個括號的值都嚴格介乎 0 與 1 之間。於是

$$p\alpha + q\beta = \alpha\left(p+q-q^b\right) = \alpha\left(1-q^b\right),$$

所以

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{A 獲勝}) = \frac{p^{a-1}\left(1-q^b\right)}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}}$$

如果你喜歡，分母可展開為 $p^{a-1}+q^{b-1}-p^{a-1}q^{b-1}$。

$a = b = 2$ **的情況**。公式變成

$$\frac{p(1-q^2)}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p(1-q)(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq},$$

其中分母用了 $1-p=q$、$1-q=p$，分子用了 $1-q=p$。這與第 (i) 部分一致。代入 $a=b=3$ 則恰好還原第 (ii) 部分的結果。

驗算

- 公平硬幣，第 (i) 部分。當 $p=q=\frac{1}{2}$ 時，答案為 $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，與對稱性的要求相符。在 (iii) 中，只要 $a=b$ 且 $p=\frac{1}{2}$，結果也是如此。
- 極端情況。當 $p\to 1$ 時，(iii) 的答案趨向 1；當 $p\to 0$ 時，它趨向 0，理應如此。
- 數值。當 $p=0.4$ 時，第 (i) 部分的答案為 $0.16\times 1.6/0.76\approx 0.3368$，第 (ii) 部分的答案約為 ≈ 0.2713。以電腦模擬 200 000 局遊戲，得到 0.336 和 0.271。當 $p=0.55$、$a=4$、$b=2$ 時，公式給出 0.2450，同樣與模擬結果吻合。

常見錯誤

- 忘記了一旦擲出的面改變，之前的連續便完全不算數。正因如此，改變之後的局面才與「該面為第一擲」相同。
- 在 (ii) 中漏掉 HHT 的情況：連續可以在第二次或第三次投擲時被打斷。
- 把 α 當作「A 獲勝的概率」的最終答案。你仍須對第一次投擲取平均，即 $p\alpha+q\beta$。

STEP 之外

這是對吸收馬爾可夫鏈（absorbing Markov chain）的首步分析（first-step analysis）。狀態是「目前的面及連續的長度」，而吸收概率滿足以下一步為條件所得的線性方程。同樣的技巧可以求出擲硬幣時各種圖案的期望等待時間，並引申至彭尼遊戲（Penney's game）：在該遊戲中，圖案的先後次序會產生一些令人意外的非傳遞（non-transitive）結果。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）以合適的程度講解了馬爾可夫鏈與吸收。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。