詳細解答

STEP II 2020，第 10 題

力學 • 能量與平衡

STEP II 2020，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

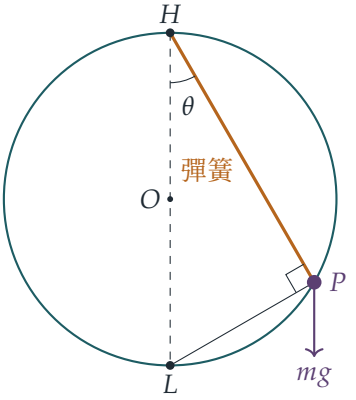
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

由於 HL 是直徑（diameter），利用「半圓上的圓周角是直角」（angle in a semicircle），彈簧長度和 P 的高度都可以直接用 θ 表示：$HP = 2a\cos\theta$，而 P 的高度比 H 低 $2a\cos^2\theta$。金屬線（wire）是光滑的，所以它的反作用力（reaction）不做功。於是整道題只涉及一個函數，就是以 $c = \cos\theta$ 為自變量的勢能（potential energy）。結果它是關於 c 的二次式（quadratic），配方後兩部分便能一併解決。

解答

將 P 視為光滑金屬線上的質點（particle），並把彈簧視為輕彈簧，遵從胡克定律（Hooke's law）（無論處於拉伸還是壓縮狀態）。設 O 為圓心。



幾何關係。由於 HL 是直徑，$\angle HPL = 90°$，因此在斜邊為 $2a$ 的直角三角形 HPL 中，

$$HP = 2a\cos\theta.$$

由 H 到 P 的垂直落差為 $HP\cos\theta = 2a\cos^2\theta$。當 P 從 L 沿任一側繞向 H 時，θ 的取值範圍是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，所以 $\cos\theta > 0$。

勢能。取 H 所在的水平為重力勢能（gravitational potential energy）的零點，並記 $c = \cos\theta$。彈簧的伸長量（extension）為 $2ac - l$，所以

$$\begin{aligned} V &= -2mga\,c^2 + \frac{\lambda}{2l}(2ac - l)^2 \\ &= \frac{2a(a\lambda - mgl)}{l}\,c^2 - 2a\lambda\,c + \frac{\lambda l}{2}. \end{aligned}$$

第 (i) 部分

光滑金屬線的反作用力不做功，因此 P 處於平衡（equilibrium）當且僅當 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$。（等價地說，沿切線方向的力互相平衡。）由連鎖法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c} = -\sin\theta\left(\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\,c - 2a\lambda\right).$$

在 $\theta = \alpha$ 處（其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$），$\sin\alpha \neq 0$，因此括號內的式子必須為零：

$$\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\cos\alpha = 2a\lambda.$$

右方不為零，所以 $a\lambda \neq mgl$，故可以相除：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda l}{2(a\lambda - mgl)},$$

此即所求。

要使這樣的 α 存在，須有 $0 < \cos\alpha < 1$。

- $\cos\alpha > 0$：分子 λl 為正，故須 $a\lambda > mgl$。
- $\cos\alpha < 1$：兩邊乘以正數 $2(a\lambda - mgl)$，得 $\lambda l < 2a\lambda - 2mgl$，即 $\lambda(2a - l) > 2mgl$。

由於 $l < 2a$，第二個條件即 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$。這亦蘊含第一個條件，因為 $\dfrac{2mgl}{2a - l} > \dfrac{2mgl}{2a} = \dfrac{mgl}{a}$。所以 $\alpha > 0$ 的平衡位置存在，僅當 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$。（反之，若此條件成立，該公式給出一個真正的角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，而由對稱性（symmetry），$-\alpha$ 亦是平衡位置。）

第 (ii) 部分

想一想 有沒有一個巧妙的方法改寫 V，使 $\cos\alpha$ 單獨出現？

有：配方（completing the square）。記 $K = \dfrac{2a(a\lambda - mgl)}{l}$。由第 (i) 部分，$\dfrac{a\lambda - mgl}{l} = \dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$，所以

$$K = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \frac{2a\lambda}{K} = 2\cos\alpha.$$

因此

$$V = K\left(c^2 - 2c\cos\alpha\right) + \frac{\lambda l}{2} = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}(c - \cos\alpha)^2 + \text{常數}.$$

（作為驗證，此式在 $c = \cos\alpha$ 處取最小值，正是第 (i) 部分求得的平衡位置。）按第 (i) 部分中平衡位置存在所需的條件，我們假設 $a\lambda > mgl$，於是 $\cos\alpha > 0$ 且 $K > 0$。

在 L 處，$\theta = 0$ 且 $c = 1$。對 L 與一般位置應用能量守恆（conservation of energy），得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 + \frac{a\lambda}{\cos\alpha}\left[(1 - \cos\alpha)^2 - (c - \cos\alpha)^2\right].$$

兩邊乘以 $\dfrac{\cos\alpha}{a\lambda} > 0$，

$$\frac{mv^2\cos\alpha}{2a\lambda} = D - (c - \cos\alpha)^2, \qquad \text{其中} D = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha. \qquad (*)$$

所以若 P 在 $\theta = \beta$ 處靜止，則該處 $v = 0$，且

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha,$$

這就是所求的方程。

想一想 這個方程對 $\cos\beta$ 有兩個根。哪一個才是真正的停止點？它又在甚麼情況下位於 H 之前？

當 P 從 L 升向 H 時，c 由 1 遞減至 0。由 $(*)$，只要 $(c - \cos\alpha)^2 < D$，P 便會繼續運動；所以質點首次停下之處，就是 c 從 1 往下減少時碰到區間 $(\cos\alpha - \sqrt{D},\ \cos\alpha + \sqrt{D})$ 較近一端的位置。現在 $D \geq (1 - \cos\alpha)^2$（若 $u > 0$ 則嚴格不等），所以 $\cos\alpha + \sqrt{D} > 1$ 且 $\cos\alpha - \sqrt{D} < 1$。因此 $c = 1$ 位於區間之內，而停止時的值為

$$\cos\beta = \cos\alpha - \sqrt{D}.$$

P 在到達 H（該處 $c = 0$）之前停下，當且僅當此值為正，即 $\sqrt{D} < \cos\alpha$，亦即 $D <$

$\cos^2\alpha$：

$$\begin{aligned}
&(1-\cos\alpha)^2+\frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha<\cos^2\alpha\\
\iff\quad &1-2\cos\alpha+\frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha<0\\
\iff\quad &\frac{mu^2}{2a\lambda}<2-\sec\alpha,
\end{aligned}$$

最後一步兩邊除以 $\cos\alpha>0$。因此，P 在到達 H 之前靜止，僅當

$$u^2<\frac{2a\lambda}{m}(2-\sec\alpha).$$

特別地，這要求 $\sec\alpha<2$，即 $\alpha<\frac{\pi}{3}$。否則無論 P 在 L 處的速率為何，都會到達 H。

驗算

- 取 $m=1$、$g=10$、$a=1$、$l=1$、$\lambda=40$（採用一致的單位）。則 $\lambda>2mgl/(2a-l)=20$，且 $\cos\alpha=40/60=\frac{2}{3}$。臨界值為 $u^2=80(2-\frac{3}{2})=40$。當 $u^2=40$ 時，$D=\frac{1}{9}+\frac{40}{80}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，所以 $\cos\beta=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$。質點恰好到達 H，正如預期。
- 若 $u=0$，則 $D=(1-\cos\alpha)^2$ 且 $\cos\beta=1$。在 L 處靜止的質點會一直留在那裏；這是正確的，因為 L 亦是平衡位置。
- 以電腦對運動方程進行數值積分，並測試大量隨機參數組合，結果顯示：恰好在 u^2 低於臨界值時，質點停在預測的 $\cos\beta$ 處。

常見錯誤

- 誤取 $HP=2a\sin\theta$，或從 O 量度高度時用錯了角。記住圓心角是 2θ，而不是 θ。
- 在第 (i) 部分只檢查 $\cos\alpha>0$。其實是條件 $\cos\alpha<1$ 給出 λ 的界限。
- 選取根 $\cos\alpha+\sqrt{D}$ 作為 $\cos\beta$。它大於 1，所以不是金屬線上的位置。

STEP 之外

把能量寫成 $K(c-\cos\alpha)^2+$ 常數，正是大學本科力學中一個關鍵思想的一維版本。對於只有一個自由度（degree of freedom）的系統，平衡位置就是勢能的駐點（stationary points），其穩定性（stability）取決於這些點是極小值還是極大值，而容許運動的區域就是能量超過勢能的地方。在這裏，當 $\alpha>0$ 存在時，L 會變成 V 的極大值，因而是不穩定平衡。彈簧令金屬線的底部變得不穩定！Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種精神介紹能量圖與穩定性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。