詳細解答

STEP II 2020，第 1 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2020，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

每個被積函數（integrand）都是兩個線性因子的冪的乘積，而且指數之和為 -2。對於這類被積函數，合適的代換（substitution）是兩個線性因子的比（ratio）（或其平方根）：它能一次過吸收兩個括號，剩下的只是一個簡單的冪或標準的反正切（arctangent）。第 (i) 部分利用題目給出的代換展示這個過程，第 (ii) 部分要求你仿效這個技巧，而第 (iii) 部分則要求你自行發現它。

解答

第 (i) 部分

設 $x = \dfrac{1}{1-u}$，則有

$$x - 1 = \frac{1-(1-u)}{1-u} = \frac{u}{1-u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

當 u 取遍 $(0,1)$ 時，x 取遍 $(1,\infty)$，且 $u = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$。由於 $0 < u < 1$，所有根號內的量都是正數，因此

$$x^{3/2}(x-1)^{1/2} = \frac{1}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{(1-u)^2}.$$

這時 $(1-u)^2$ 的因子恰好與 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ 互相抵消：

$$\int \frac{1}{x^{3/2}(x-1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{u^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2u^{1/2} + c = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + c.$$

第 (ii) 部分

在第 (i) 部分中，$u = \frac{x-1}{x}$ 正是兩個線性因子之比。這裏我們仿效這個想法，取

$$u = \frac{x-2}{x+1}, \qquad \text{等價地} \qquad x+1 = \frac{3}{1-u}, \quad x-2 = \frac{3u}{1-u},$$

因為 $x-2 = (x+1)-3$。當 $x > 2$ 時，得 $0 < u < 1$，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \dfrac{3}{(1-u)^2}$。於是

$$(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2} = \frac{3^{3/2}u^{3/2}}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{3^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{9u^{3/2}}{(1-u)^2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(1-u)^2}{9u^{3/2}} \cdot \frac{3}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{3}u^{-1/2} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + c.\end{aligned}$$

求導可以驗證這個結果。設 $f = \frac{x+1}{x-2}$，則 $f' = -\frac{3}{(x-2)^2}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{f}\right) = -\frac{f'}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}.$$

第 (iii) 部分

這次題目沒有給出代換。由於多了一個因子 $x-1$，被積函數並不是某個比的純冪，但兩個平方根與之前屬同一類型。

> **想一想** 前兩個答案都是線性因子之比的平方根。如果把這樣一個平方根取作新變量，會發生甚麼事？

試設

$$t = \sqrt{\frac{x-2}{3x-2}}.$$

當 x 由 2 增加至 ∞ 時，$\frac{x-2}{3x-2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3(3x-2)}$ 由 0 遞增並趨向 $\frac{1}{3}$，所以 t 由 0 遞增至 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，並且始終有 $0 \le t < \frac{1}{\sqrt{3}}$。由 $t^2(3x-2) = x-2$ 解出 x，得

$$x = \frac{2(1-t^2)}{1-3t^2},$$

其中 $1-3t^2 > 0$。由此，

$$x-1 = \frac{1+t^2}{1-3t^2}, \qquad 3x-2 = \frac{4}{1-3t^2},$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2[-2t(1-3t^2)+6t(1-t^2)]}{(1-3t^2)^2} = \frac{8t}{(1-3t^2)^2}.$$

由於 $\sqrt{x-2} = t\sqrt{3x-2}$，兩個平方根可以整齊地合併：

$$(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = t\,(3x-2) = \frac{4t}{1-3t^2}.$$

所以整個分母是

$$(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = \frac{4t(1+t^2)}{(1-3t^2)^2},$$

而一切再次與 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 互相抵消：

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{(1-3t^2)^2}{4t(1+t^2)} \cdot \frac{8t}{(1-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\Big[\arctan t\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

此即所求。

原積分在兩端都是反常積分（improper integral），但它是收斂（converge）的。在 $x=2$ 附近，被積函數的表現類似 $\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$；當 x 很大時，則類似 $\frac{1}{\sqrt{3}}x^{-2}$。代換把它變成一個連續函數在有限區間上的普通積分，因此無需另外取極限。

驗算

- 對 (i) 和 (ii) 的答案求導。就 (i) 而言，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} = x^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$。
- 正負號：(ii) 的被積函數是正數，所以原函數（antiderivative）必須遞增。事實的確如此，因為當 x 增大時，$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 遞減並趨向 1。
- 數值驗算：用辛普森法則（Simpson's rule）計算 (i) 中的 $\int_{1.5}^{3}$ 和 (ii) 中的 $\int_{2.5}^{4}$，結果與原函數給出的數值一致（0.47829… 和 0.70974…）。把 (iii) 的積分在 $x=3$ 處分拆後直接計算，得 $1.0471975\ldots = \frac{\pi}{3}$。

常見錯誤

- 在 (iii) 中忘記更改積分上下限。上限是 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$，而不是 ∞；$\frac{\pi}{6}$ 正是由此而來。
- 把 (i) 或 (ii) 的答案寫成 u 的式子，而沒有按題目要求換回 x。
- 處理 $1-u$ 的半次冪時出錯。要小心合併：$(1-u)^{-3/2}(1-u)^{-1/2} = (1-u)^{-2}$。

STEP 之外

由 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ 構成的被積函數，總可以用類似我們的代換化為有理函數。這屬於積分 x 與 $\sqrt{\text{二次式}}$ 的有理函數（rational function）的經典理論（歐拉（Euler）代換）。第 (iii) 部分同時也是一個在無限區間上的反常積分，而用極限來為這類積分賦予意義，是大學一年級分析（analysis）的標準課題。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對反常積分有細緻的處理，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）則收錄了更多這類 STEP 積分題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。