詳細解答

STEP III 2019，第 9 題

力學 • 移動半球上的質點

STEP III 2019，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

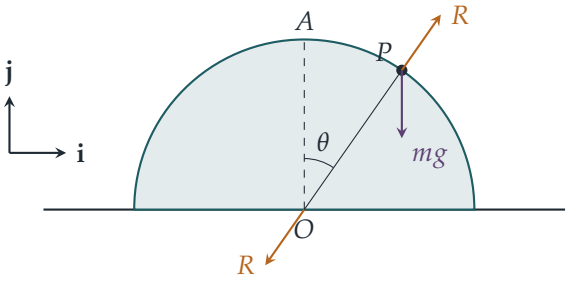
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

兩個接觸面都是光滑（smooth）的，所以作用於整個系統（質點加半球）的外力都沒有水平分量：水平動量守恆（conservation of horizontal momentum），這把半球的速率與質點的角速率聯繫起來。由於除重力外沒有其他力做功，能量亦守恆（conservation of energy），這兩條定律合起來便得出第 (ii) 部分。至於質點何時離開表面，最乾淨的判斷準則是法向反作用力（normal reaction）變為零；題目建議的向量經過特意挑選，使我們取分量時，未知的 $\ddot{\theta}$ 會消失。

解答

模型：P 是一個質點，半球是剛體（rigid body），所有接觸面都光滑。兩者接觸期間，P 與半球之間唯一的力是沿 OP 方向的法向反作用力 R，而桌面則對半球施加鉛垂方向的推力。



作用於半球的反作用力（為清晰起見畫在 O 處）與作用於 P 的反作用力大小相等、方向相反。

第 (i) 部分

在時間 t，球心 O 已移至 $-s\,\mathbf{i}$，而 P 與它的距離為 a，方向為 $\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$。因此

$$\mathbf{r}=(a\sin\theta-s)\,\mathbf{i}+a\cos\theta\,\mathbf{j},$$

對 t 求導（對 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 使用連鎖法則（chain rule）），得

$$\dot{\mathbf{r}}=(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)\,\mathbf{i}-a\dot\theta\sin\theta\,\mathbf{j},$$

得證。

作用於系統的外力是兩個重量和桌面的反作用力，全部都是鉛垂方向的，所以總水平動量一直保持其初始值，即零（我們假設微小的初始位移所帶來的速率可以忽略）。半球的速度是 $-\dot s\,\mathbf{i}$，所以

$$m(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)-M\dot s=0\quad\Longrightarrow\quad \dot s=\frac{m}{m+M}\,a\dot\theta\cos\theta=(1-k)\,a\dot\theta\cos\theta,$$

因為 $1-k=\dfrac{m}{m+M}$。代入 $\dot{\mathbf{r}}$ 的 $\mathbf{i}$ 分量，

$$a\dot\theta\cos\theta-(1-k)a\dot\theta\cos\theta=k\,a\dot\theta\cos\theta,\qquad\text{所以}\qquad \dot{\mathbf{r}}=a\dot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}).$$

第 (ii) 部分

各反作用力所做的淨功為零：桌面的反作用力與半球的運動方向垂直；而 P 與半球之間的一對力 $\pm R$ 所做的總功為零，因為 P 一直留在表面上（兩者的相對速度沿着表面，與 R 垂直）。所以動能加勢能守恆。P 已下降了 $a(1-\cos\theta)$，而起初所有物體（實際上）都是靜止的，所以

$$\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\tfrac12 M\dot s^2=mga(1-\cos\theta).$$

利用第 (i) 部分，$M\dot s^2=M(1-k)^2a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$。於是 $a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$ 的總係數為

$$mk^2+M(1-k)^2=\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}=\frac{mM}{m+M}=mk.$$

因此 $\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k\cos^2\theta+\sin^2\theta)=mga(1-\cos\theta)$，兩邊除以 $\tfrac12 ma$，

$$a\dot\theta^2(k\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2g(1-\cos\theta).$$

第 (iii) 部分

設 $\mathbf{u}=\sin\theta\,\mathbf{i}+k\cos\theta\,\mathbf{j}$。對第 (i) 部分的最後結果求導，

$$\ddot{\mathbf{r}}=a\ddot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j})-a\dot\theta^2\,(k\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}).$$

第一個括號與 $\mathbf{u}$ 垂直，因為 $k\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\,k\cos\theta=0$。所以

$$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u}=-a\dot\theta^2(k\sin^2\theta+k\cos^2\theta)=-k\,a\dot\theta^2.$$

想一想 為甚麼這個向量特別有用？

它消去了我們一無所知的 $\ddot{\theta}$ 項，只剩下第 (ii) 部分已給出的 $\dot{\theta}^2$。現在與 P 的牛頓第二定律（Newton's second law）作比較：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{j} + R(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

取沿 $\mathbf{u}$ 的分量，並與上面的結果比較，

$$-mk\,a\dot{\theta}^2 = -mgk\cos\theta + R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta),$$

所以

$$R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta) = mk(g\cos\theta - a\dot{\theta}^2).$$

當 R 降至零時，質點便離開半球。由於 $k > 0$，在 $\theta = \alpha$ 時得

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\alpha.$$

三次方程。 設 $c = \cos\alpha$，並在 $\theta = \alpha$ 時使用第 (ii) 部分，配合 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$：

$$gc(kc^2 + 1 - c^2) = 2g(1 - c) \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\,c^3 - 3c + 2 = 0.$$

設 $f(x) = (1-k)x^3 - 3x + 2$，其中 $0 < 1 - k < 1$，因為 m 和 M 都是正數。

- 對於 $-1 \le x \le 1$，$f'(x) = 3\big((1-k)x^2 - 1\big) < 0$，所以 f 在該區間嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[-1, 1]$ 內最多只有一個根。
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}(1-k) - 2 + 2 = \frac{8}{27}(1-k) > 0$，而 $f(1) = -k < 0$。

所以 $[-1, 1]$ 內唯一的根嚴格位於 $\frac{2}{3}$ 與 1 之間。由於 $\cos\alpha$ 必須位於 $[-1, 1]$ 內，它就是這個根，因此

$$\cos\alpha > \tfrac{2}{3}.$$

（這與 R 的公式一致：代入第 (ii) 部分可見 $g\cos\theta - a\dot{\theta}^2$ 與 $-f(\cos\theta)$ 同號，它在 $\theta = 0$ 時為正，並在這個根處首次變為零，所以 P 確實一直保持接觸，直至那一刻。）

驗算

- 若 $M \to \infty$，則 $k \to 1$，半球保持不動，三次方程變為 $-3c + 2 = 0$：即質點從固定球面滑落時大家熟悉的 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$。半球會移動，令質點較早離開，即在較大的 $\cos\alpha$ 處離開。
- 當兩者質量相等時，$1 - k = \frac{1}{2}$，三次方程 $c^3 - 6c + 4 = 0$ 可因式分解為 $(c-2)(c^2 + 2c - 2) = 0$，得 $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$，大於 $\frac{2}{3}$。

- 用電腦對完整運動作逐步數值模擬（numerical simulation），測試了多個質量比，過程中證實了第 (i) 和第 (ii) 部分的關係式，並發現當 $m = M$ 時反作用力在 $\cos\theta \approx 0.732$ 處變為零，與三次方程吻合。

常見錯誤

- 未經論證便使用固定球面的條件 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$：這裏半球有加速度，所以質點的加速度並不只是繞固定點的圓周運動。這條件在離開的一刻恰好成立，只是因為 $R = 0$ 意味着半球在那一刻沒有水平加速度。
- 在能量方程中漏掉半球的動能 $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$。
- 只證明了有一個根位於 $\frac{2}{3}$ 與 1 之間，卻沒有排除 $[-1, 1]$ 內存在另一個根。

STEP 之外

這是一個具兩個自由度（degrees of freedom）的系統，拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）可以有系統地處理它：用 θ 和 s 寫出動能和勢能，由於 s 不出現在拉格朗日量（Lagrangian）中，水平動量守恆便自動出現（這是一個「可忽略」坐標（ignorable coordinate），由諾特（Noether）定理與一種對稱性聯繫起來）。像 R 這樣的約束力（constraint forces）則在之後才求出，正如我們在這裏所做的一樣。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是先建立牛頓力學直覺的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。