詳細解答

STEP III 2019，第 8 題

純數學 • 向量與三維幾何

STEP III 2019，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

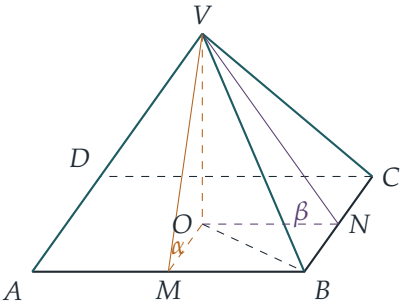
先為棱錐（pyramid）建立坐標。每個斜面都包含一條底邊，而底邊是水平的，因此該斜面的法向量（normal）必與這條底邊垂直。這就迫使法向量落在一個鉛垂平面內，而在這個平面上，斜面與底面之間的夾角可以直接讀出。之後，兩個斜面之間的夾角可由兩條法向量的點積（dot product）求得，其餘部分就只是細心的三角代數運算，再加上一次算術－幾何平均不等式（AM–GM）。

解答

設底面的中心為原點 O，$\mathbf{i}$ 沿 AB 方向，$\mathbf{j}$ 沿 BC 方向，$\mathbf{k}$ 向上。取

$$A=(-a,-b,0),\quad B=(a,-b,0),\quad C=(a,b,0),\quad D=(-a,b,0),\quad V=(0,0,h),$$

其中 $a,b,h>0$。



設 $M=(0,-b,0)$ 為 AB 的中點，$N=(a,0,0)$ 為 BC 的中點。由於 $VA=VB$，直線 VM 位於面 AVB 內並與 AB 垂直；底面上的 OM 亦與 AB 垂直。因此該斜面與底面之

間的夾角就是角 VMO，並且

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \text{同樣地} \qquad \tan\beta = \frac{h}{a}.$$

第 (i) 部分

面 AVB 包含方向 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{i}$ 及 $\overrightarrow{MV} = b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$。其一條法向量為

$$\mathbf{i} \times (b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}) = -h\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

除以其長度 $\sqrt{h^2 + b^2}$，並利用 $\tan\alpha = h/b$，便得單位法向量（unit normal）

$$\mathbf{n}_1 = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

它的 $\mathbf{j}$ 分量為負，所以它指向棱錐外面（面 AVB 位於 $y < 0$ 的一側）。

用完全相同的方法，面 BVC 包含 $\mathbf{j}$ 及 $\overrightarrow{NV} = -a\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$，其向外的單位法向量為

$$\mathbf{n}_2 = \sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

因此

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

> ? **想一想** 兩條法向量之間的夾角，究竟是兩個面之間的夾角，還是它的補角（supplement）？

考慮一個與公共棱 VB 垂直的截面。在截面上，兩個面顯示為兩條直線，相交成內角 $\pi - \theta$，而每條向外法向量都與所屬直線垂直，並指離立體。把其中一個面經內角轉到另一個面上，向外法向量亦會轉過同樣的角度；但在截面上，兩條法向量都指向外面，所以它們之間的夾角是 $\pi - (\pi - \theta) = \theta$。（想像一個立方體：兩面成 $\frac{\pi}{2}$，法向量亦成 $\frac{\pi}{2}$；把棱錐壓扁，兩面的夾角趨向 π，而法向量的夾角則趨向 0。）因此

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$

此即所求。由於 $0 < \cos\alpha\cos\beta < 1$，$\theta$ 是銳角，這與兩個面相交成鈍角的情況一致。

第 (ii) 部分

從 V 所作垂線的垂足是 O，所以 BV 與底面之間的夾角是角 VBO，且

$$\cot\phi = \frac{OB}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h}.$$

因此

$$\cot^2\phi = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \cot^2\beta + \cot^2\alpha,$$

這裏用了 $\cot\beta = a/h$ 及 $\cot\alpha = b/h$。這就是第一個結果。

至於第二個結果，記 $p = \cos^2\alpha$，$q = \cos^2\beta$，則由第 (i) 部分得 $\cos^2\theta = pq$。於是

$$\cot^2\phi = \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} = \frac{p+q-2pq}{(1-p)(1-q)}.$$

由於 $\cos^2\phi = \dfrac{\cot^2\phi}{1+\cot^2\phi}$，我們需要

$$1+\cot^2\phi = \frac{(1-p)(1-q)+p+q-2pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)},$$

兩者相除，得

$$\cos^2\phi = \frac{p+q-2pq}{1-pq} = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

（由於 $\cos\theta < 1$，分母為正。）

由於 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 均為正，根據算術－幾何平均不等式，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta \;\geq\; 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\theta,$$

又因 $1-\cos^2\theta > 0$，

$$\cos^2\phi \;\geq\; \frac{2\cos\theta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

想一想 這個下界怎樣告訴我們有關 ϕ 和 θ 的資訊？

把它化簡，再與 $\cos^2\theta$ 比較。約去正因子 $1-\cos\theta$，

$$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

記 $c = \cos\theta \in (0,1)$，

$$\frac{2c}{1+c} - c^2 = \frac{c\,(2-c-c^2)}{1+c} = \frac{c\,(1-c)(2+c)}{1+c} > 0.$$

所以 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2c}{1+c} > \cos^2\theta$。$\phi$ 和 θ 均位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，而餘弦在此區間內為正且遞減，所以由 $\cos\phi > \cos\theta$ 得 $\phi < \theta$。

驗算

- 正方形底面，且 h 等於邊長的一半（$a = b = h$）：$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$，所以 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = 60°$。直接計算，$\cot\phi = \sqrt{2}$，所以 $\cot^2\phi = 2 = 1+1$，且 $\phi \approx 35.26° < 60°$。此外 $\cos^2\phi = \frac{2}{3}$，與 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})/(1-\frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$ 相符。
- 以電腦對 10^5 個隨機棱錐進行驗算，透過經 VB 的截面直接量度兩面之間的夾角，結果與 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 及 ϕ 的兩條公式均吻合，而且每次都得到 $\phi < \theta$。

常見錯誤

- 一個面取向內法向量，另一個面卻取向外法向量：這樣點積的正負號便會出錯，得出的是 $\cos(\pi - \theta)$。
- 沿棱 VA 而非沿斜高（slant height）VM 量度 α；兩個平面之間的夾角必須在與其交線垂直的方向上量度。
- 只推到 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$ 便停下，而沒有證明這個值大於 $\cos^2\theta$。

STEP 之外

兩個平面之間的夾角等於它們法向量之間的夾角（至多相差一個補角），這正是多變量微積分（multivariable calculus）和微分幾何（differential geometry）中用法向量描述曲面的起點。恆等式 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 其實亦是球面畢氏定理（spherical Pythagoras theorem）的變相形式：三條法向量 $\mathbf{k}$、$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$ 構成一個球面直角三角形。若想加深對點積和叉積（cross product）的體會，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是個不錯的起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。