詳細解答

STEP III 2019，第 7 題

純數學 • 曲線描繪

STEP III 2019，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

方程只含 x^2 和 y^2，所以它是 x^2（或 y^2）的二次方程（quadratic）。這一下子給了我們兩件工具：一是判別式（discriminant），它告訴我們曲線能取到哪些 y 值；二是以 y 表示 x^2 的明確公式。要看曲線在原點附近的形狀，只保留最低次的項；要看遠處的形狀，則只保留最高次的項。在 $a = b$ 這個特殊情況下，方程可以完全因式分解（factorise）。

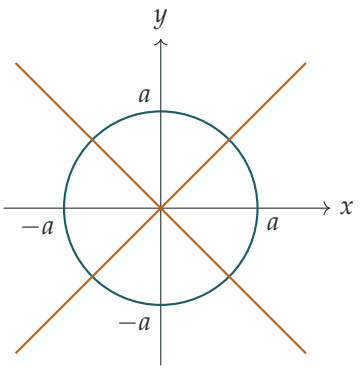
解答

第 (i) 部分

設 $a = b$，把所有項移到同一邊，並把四次（quartic）項和二次項分組：

$$\begin{aligned} 0 &= (y^4 - x^4) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2). \end{aligned}$$

因此一點在曲線上，當且僅當 $y = \pm x$ 或 $x^2 + y^2 = a^2$：魔鬼曲線（Devil's Curve）就是兩條直線 $y = x$ 和 $y = -x$，加上以原點為圓心、半徑為 a 的圓。



第 (ii)(a) 部分

現在 $a = 2$、$b = \sqrt{5}$，曲線為 $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$。固定 $y \geq 0$，並記 $X = x^2$。一點 (x, y)（其中 $x \geq 0$）在曲線上，當且僅當 $X \geq 0$ 滿足

$$X^2 - 4X - (y^4 - 5y^2) = 0.$$

要有實根，判別式必須非負：

$$\begin{aligned} 16 + 4(y^4 - 5y^2) &= 4(y^4 - 5y^2 + 4) = 4(y^2 - 1)(y^2 - 4) \\ &= 4(y+1)(y+2)(y-1)(y-2) \geq 0. \end{aligned}$$

由於 $y \geq 0$，因子 $y+1$ 和 $y+2$ 都是正數，所以需要 $(y-1)(y-2) \geq 0$，即

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{或} \quad y \geq 2.$$

反過來，每個這樣的 y 都確實會出現。兩個根是

$$X = 2 \pm \sqrt{D}, \qquad D = (y^2 - 1)(y^2 - 4),$$

其中較大的根至少是 2，所以它是合法的 x^2。下面會用到這條 x^2 的公式。

第 (ii)(b) 部分

在原點附近，四次項 y^4 和 x^4 與 y^2 和 x^2 相比微不足道。所以曲線近似於

$$-5y^2 \approx -4x^2, \qquad \text{即} \qquad y \approx \tfrac{2}{\sqrt{5}}\, x \quad (x, y \geq 0).$$

曲線沿着斜率（gradient）為 $2/\sqrt{5} \approx 0.89$ 的直線離開原點，略低於直線 $y = x$。（(a) 的公式也吻合：對於根 $X = 2 - \sqrt{D}$，用二項展開（binomial expansion）可得 $x^2 = \frac{5}{4}y^2 + O(y^4)$。）

在離原點很遠處，最高次的項佔主導：$y^4 \approx x^4$，所以 $y \approx x$。我們還可以做得更好。把方程寫成

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 5y^2 - 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - x^2 = \frac{5y^2 - 4x^2}{y^2 + x^2}.$$

由於 $y/x \to 1$，右邊趨向 $\frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$。所以 $y^2 \approx x^2 + \frac{1}{2}$，從而

$$y \approx x + \frac{1}{4x}.$$

曲線以直線 $y = x$ 為漸近線（asymptote），並從上方趨近它。事實上，除原點外曲線從不與這條直線相交：把 $y = x$ 代入方程，得 $x^2 = 0$。

第 (ii)(c) 部分

對 $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$ 關於 x 進行隱函數微分（implicit differentiation），

$$(4y^3 - 10y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 8x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x^2 - 2)}{y(2y^2 - 5)}.$$

切線（tangent）平行於 x 軸：需要分子為零而分母不為零。所以 $x = 0$ 或 $x = \sqrt{2}$。

- $x = 0$：此時 $y^4 = 5y^2$，所以 $y = 0$ 或 $y = \sqrt{5}$。在 $(0, \sqrt{5})$，分母為 $\sqrt{5}(10 - 5) \neq 0$，所以這一點符合。
- $x = \sqrt{2}$：此時 $y^4 - 5y^2 = 4 - 8$，所以 $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$，得 $y = 1$ 或 $y = 2$。這兩處的分母分別是 -3 和 6，都不為零。

> ? **想一想** 原點處分子也是零，為甚麼我們不把它算進去？

在 $(0,0)$，分母也是零，所以公式給出 $0/0$，甚麼也說明不了。(b) 部分已經解決了這個問題：曲線以斜率 $2/\sqrt{5}$（而不是 0）穿過原點。

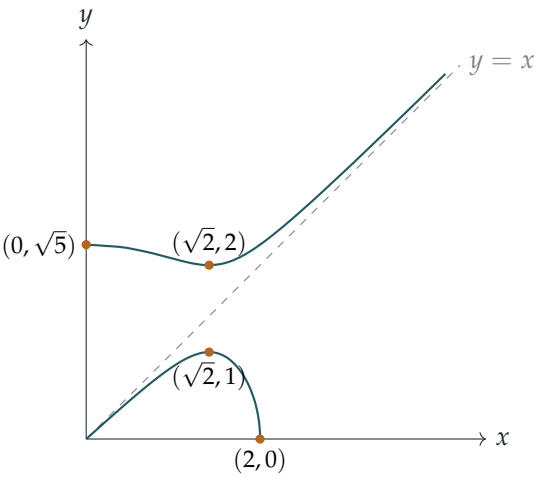
所以切線在 $(0, \sqrt{5})$、$(\sqrt{2}, 1)$ 和 $(\sqrt{2}, 2)$ 處是水平的。

切線平行於 y 軸：需要分母為零而分子不為零，所以 $y = 0$ 或 $y^2 = \frac{5}{2}$。但 $\sqrt{5/2} \approx 1.58$ 嚴格介乎 1 與 2 之間，已被 (a) 部分排除。當 $y = 0$ 時得 $x^4 = 4x^2$，所以 $x = 0$（又是原點，如上所述須排除）或 $x = 2$。在 $(2,0)$，分子為 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$。所以唯一這樣的點是 $(2,0)$。

$x \geq 0$、$y \geq 0$ **部分的草圖** 利用 $x^2 = 2 \pm \sqrt{D}$，曲線分為兩段。

- $0 \leq y \leq 1$ **的一個環**。根 $2 - \sqrt{D}$ 由 0（在 $y = 0$）增至 2（在 $y = 1$），而 $2 + \sqrt{D}$ 則由 4 減至 2。所以曲線以斜率 $2/\sqrt{5}$ 離開原點，升至 $(\sqrt{2}, 1)$ 處的極大值，再下降，在 $(2,0)$ 處垂直地與 x 軸相交。

- $y \geq 2$ **的一翼**。當 $2 \leq y \leq \sqrt{5}$ 時，根 $2 - \sqrt{D}$ 由 2 減至 0；超過 $y = \sqrt{5}$ 後它變成負數，不再是合法的 x^2。根 $2 + \sqrt{D}$ 則由 2 開始無界地增大。所以這一支由 $(0, \sqrt{5})$ 開始，切線水平，下降至 $(\sqrt{2}, 2)$ 處的極小值，然後上升，從上方趨近 $y = x$。

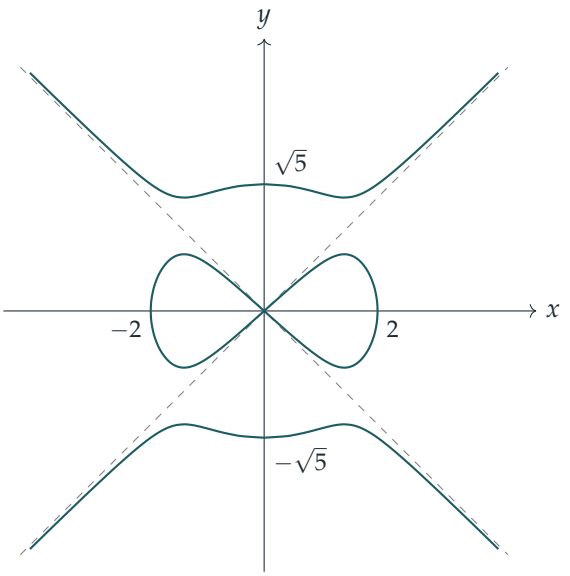


第 (iii) 部分

方程只涉及 x^2 和 y^2，所以曲線關於 y 軸對稱（symmetric）（把 x 換成 $-x$），也關於 x 軸對稱（把 y 換成 $-y$）。把四分之一的曲線分別對兩條軸作反射：

- 環變成介乎 $x = -2$ 與 $x = 2$ 之間的「8」字形（figure-of-eight），且 $|y| \leq 1$。兩瓣沿直線 $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} x$ 在原點相交，轉向點（turning point）位於 $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$。
- 翼變成兩支，一支在 $y \geq 2$，另一支在 $y \leq -2$。每支在 $(0, \pm\sqrt{5})$ 處有局部極大值（local maximum）或局部極小值，轉向點位於 $(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$，兩支都從外側趨近漸近線 $y = \pm x$。

曲線沒有任何部分位於帶狀區域 $1 < |y| < 2$ 內。



驗算

- 每個標示的點都滿足方程。例如在 $(\sqrt{2}, 2)$，兩邊都等於 -4；在 $(0, \sqrt{5})$，兩邊都等於 0。
- 點 $(1, 1.5)$ 位於禁區帶內。在該處左邊為 $2.25 \times (-2.75) \approx -6.19$，而右邊 $x^2(x^2-4)$ 永遠不會小於 -4（這是它在 $x^2 = 2$ 處的最小值）。這正是判別式論證的縮影。
- 在翼上取 $y = 100$，公式給出 $x^2 = 2 + \sqrt{(10^4-1)(10^4-4)}$。於是 $4x(y-x) \approx 1.0002$，與 $y - x \approx \frac{1}{4x}$ 吻合。在原點附近，環上的比值 y/x 趨向 $0.8944 \approx 2/\sqrt{5}$。

常見錯誤

- 把 $(0,0)$ 列為切線水平（或垂直）的點。在該處 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是 $0/0$，真正的斜率要由 (b) 得出。
- 把環畫成沿 $y = x$ 離開原點，或把翼畫成與 $y = x$ 相交。環的起始斜率是 $2/\sqrt{5} < 1$，而翼嚴格保持在 $y = x$ 上方。
- 忘記條件 $x^2 \geq 0$——正是這個條件令內側的根在 $y = \sqrt{5}$ 處終止。

STEP 之外

魔鬼曲線是一條代數曲線（algebraic curve）：即多項式 $F(x, y)$ 的零點集。原點是一個奇點（singular point），在該處兩個偏導數（partial derivative）F_x 和 F_y 都等於零。F 的最低次項給出該處的切線，這正是我們在 (b) 所做的；而最高次項則給出漸近線的方向。到了大學，這些概念會在隱函數定理（implicit function theorem）和代數幾何（algebraic geometry）中再次出現。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多 STEP 風格的曲線描繪題，並附有詳盡評註。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。