詳細解答

STEP III 2019，第 6 題

純數學 • 阿根圖上的圓

> **STEP III 2019，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

開首那條式子其實就是喬裝了的 $|z-a|^2-r^2$，所以軌跡（locus）是與 a 距離為 r 的點的集合。至於在 $\omega=1/z$ 之下的像，先代入 $z=1/\omega$，消去分母，再把結果整理回與原方程相同的形式。一旦化成這個形式，便可以比較係數（matching coefficients），直接讀出圓心和半徑。最後比較圓心和半徑，就能判斷 C' 與 C 何時是同一個圓。

解答

由於 $(z-a)^*=z^*-a^*$，

$$|z-a|^2=(z-a)(z^*-a^*)=zz^*-a^*z-az^*+aa^*,$$

所以題目給出的方程正好說 $|z-a|^2=r^2$，即 $|z-a|=r$（因為 $r>0$）。因此 C 是**圓心為 a、半徑為 r 的圓**。

更一般地，若 $s>0$，方程 $ww^*-bw^*-b^*w+bb^*-s^2=0$ 表示圓心為 b、半徑為 s 的圓。我們會把這個當作模板使用。

第 (i) 部分

首先，$z=0$ 不在 C 上：否則需要 $|a|=r$，即 $a^*a=r^2$，而這已被排除。所以對 C 上每一點，$\omega=1/z$ 都有定義，而且 $\omega\neq 0$。另外 $z=1/\omega$，所以 Q 在 C' 上當且僅當 $\omega\neq 0$ 且

$$\left|\frac{1}{\omega}-a\right|=r \iff |1-a\omega|=r|\omega| \iff (1-a\omega)(1-a^*\omega^*)=r^2\omega\omega^*.$$

展開並合併同類項，

$$(a^*a - r^2)\,\omega\omega^* - a\omega - a^*\omega^* + 1 = 0.$$

設 $k = a^*a - r^2 = |a|^2 - r^2$，由題設它是一個非零實數。兩邊除以 k，

$$\omega\omega^* - \frac{a^*}{k}\,\omega^* - \frac{a}{k}\,\omega + \frac{1}{k} = 0.$$

這與模板吻合，其中 $b = a^*/k$（由於 k 是實數，所以 $b^* = a/k$），前提是 $bb^* - s^2 = 1/k$，即

$$s^2 = \frac{|a|^2}{k^2} - \frac{1}{k} = \frac{|a|^2 - k}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}.$$

這是正數，所以 C' 確實是一個圓，其

$$\text{圓心為}\frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \qquad \text{半徑為}\frac{r}{||a|^2 - r^2|}.$$

（注意 $\omega = 0$ 不滿足這方程，因為它會給出 $1 = 0$。所以這個圓上每一點確實都是某個在 C 上的 z 的 $1/z$。）

想一想 兩個圓何時相同？

兩個圓相同，當且僅當它們有相同的圓心和相同的半徑。所以 $C' = C$ 要求

$$\frac{r}{|k|} = r \qquad \text{及} \qquad \frac{a^*}{k} = a.$$

第一個條件給出 $|k| = 1$，即 $k^2 = 1$：

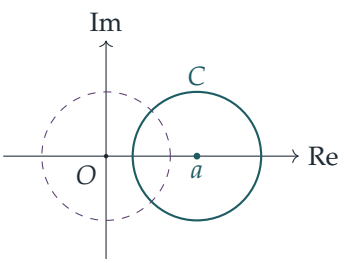
$$(|a|^2 - r^2)^2 = 1.$$

所以 $k = 1$ 或 $k = -1$，再由第二個條件得：

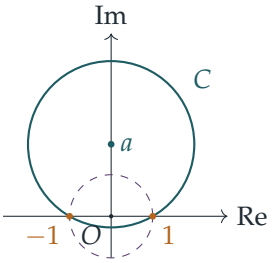
- 若 $k = 1$：$a^* = a$，所以 a 是**實數**；
- 若 $k = -1$：$a^* = -a$，所以 a 是**虛數**（純虛數（purely imaginary））。

（若 $a = 0$，則兩者皆是，此時 $r = 1$。）反過來，上述任一情況，加上半徑條件，的確會令圓心和半徑一致。

草圖。若 a 是實數，則 $|a|^2 = r^2 + 1 > r^2$，所以圓心在實軸上，與 O 的距離為 $\sqrt{r^2+1}$，而原點位於 C 的外面。這個圓與實軸相交於 $a - r$ 和 $a + r$，兩者之積為 $a^2 - r^2 = 1$，這是必然的，因為 $1/z$ 會把它們互換。若 a 是虛數，則 $|a|^2 = r^2 - 1$，所以這情況需要 $r \geq 1$。圓心在虛軸上，而原點位於 C 的裏面。設 $a = \mathrm{i}c$，與實軸的交點滿足 $x^2 + c^2 = r^2$，所以 $x = \pm 1$。在兩種情況下，C 都與單位圓（虛線）成直角相交（正交（orthogonal））因為 $|a|^2 = r^2 \pm 1$（左圖中 $a = \sqrt{2}$，$r = 1$；右圖中 $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$，$r = 2$）。



a 為實數



a 為虛數

若 a 是實數，它當然也可以是負數，得出的是左圖關於虛軸的鏡像；同樣，虛數 a 也可以位於實軸下方。

第 (ii) 部分

現在 $z = 1/\omega^*$，所以 Q 在軌跡上當且僅當

$$\left|\frac{1}{\omega^*} - a\right| = r \iff |1 - a\omega^*| = r|\omega^*| \iff |1 - a^*\omega| = r|\omega|,$$

這裏是在第一個模（modulus）裏面取共軛（conjugate）（一個數與它的共軛有相同的模）。這正是第 (i) 部分的方程，只是把 a 換成 a^*。所以由第 (i) 部分，軌跡是一個圓，其

$$\text{圓心為}\frac{a}{k}, \qquad \text{半徑為}\frac{r}{|k|}, \qquad k = |a|^2 - r^2.$$

要這個圓就是 C，需要 $|k| = 1$ 及 $a/k = a$。若 $a \neq 0$，第二個條件迫使 $k = 1$，而條件就只有這些：條件正好是

$$|a|^2 = r^2 + 1,$$

它對 a 的輻角（argument）沒有任何限制。（若 $a = 0$，則與之前一樣需要 $r = 1$。）

? **想一想** 你能找出一個既非實數、亦非虛數的具體 a 嗎？

取 $a = 1 + \mathrm{i}$ 及 $r = 1$。那麼 $|a|^2 = 2 = r^2 + 1$，所以 Q 的軌跡就是 C，但 a 既不是實數，也不是純虛數。所以答案是**否**：a 並不一定是實數或虛數。

驗算

- 取 $a = \sqrt{5}$，$r = 2$（於是 $|a|^2 - r^2 = 1$），C 上的點 $z = \sqrt{5} \pm 2$ 映到 $1/(\sqrt{5} \pm 2) = \sqrt{5} \mp 2$，它們仍然在 C 上。
- 在第 (ii) 部分取 $a = 1 + \mathrm{i}$，$r = 1$：點 $z = 1$ 在 C 上，而 $1/z^* = 1$ 也在。點 $z = 2 + \mathrm{i}$ 給出 $1/z^* = (2 + \mathrm{i})/5 = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$，而 $|(0.4 + 0.2\mathrm{i}) - (1 + \mathrm{i})|^2 = 0.36 + 0.64 = 1$。但 $1/z = 0.4 - 0.2\mathrm{i}$ 不在 C 上，所以這個圓在第 (i) 部分的映射下並不固定。

- 兩部分中的像圓亦已用電腦驗證：把隨機圓上的大量點映射過去，再量度它們與預測圓心的距離。

常見錯誤

- 把 C' 的圓心寫成 $a/(|a|^2 - r^2)$，而不是 $a^*/(|a|^2 - r^2)$。讀出圓心需要看 ω^* 的係數，而不是 ω 的係數。
- 忘記半徑 $r/\left||a|^2 - r^2\right|$ 中的絕對值。沒有它的話，$|a| < r$ 的情況會得出負的半徑。
- 在第 (ii) 部分照搬第 (i) 部分而答「是」，沒有留意到共軛把條件 $a^* = \pm a$ 消除了。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 1/z^*$ 是關於單位圓的反演（*inversion in the unit circle*），而 $z \mapsto 1/z$ 則是先作這個反演，再關於實軸作反射。兩者都屬於莫比烏斯變換（Möbius transformations）這個家族，這類變換總是把圓和直線映到圓和直線。第 (ii) 部分就是一個經典事實：一個圓在反演下固定，當且僅當它與反演圓成直角相交，即 $|a|^2 = r^2 + 1$（或者它就是單位圓本身）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以大量圖像，優美地發展了這些概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。