詳細解答

STEP III 2019，第 5 題

純數學 • 代換積分法

STEP III 2019，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分中的函數把 $[0,\infty)$ 光滑且遞增地映射到 $[0,1)$ 上。因此只要把它乘以一個常數，就能把一個 y 積分（積分區間是 $[0,c)$ 的一部分）轉化為一個 x 積分（積分區間是 $[0,\infty)$ 的一部分）。這樣做亦會令 c^2-y^2 變成一個經過偽裝的完全平方，從而消去那個麻煩的平方根。根號消失後，剩下的是一個有理 (rational) 被積函數 (integrand)，可以用題目註釋中給出的反正切(arctangent)積分來處理。倒數代換(reciprocal substitution) $y=1/u$ 則把後面的積分聯繫回第一個積分。

解答

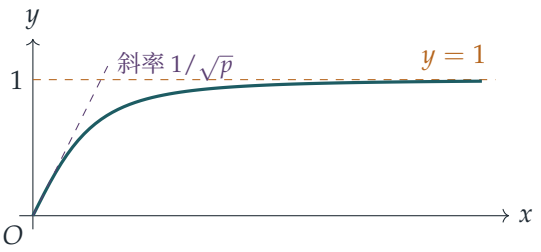
第 (i) 部分

設 $f(x)=x(x^2+p)^{-1/2}$ 且 $p>0$，則 $f(0)=0$，且

$$f'(x)=(x^2+p)^{-1/2}-x^2(x^2+p)^{-3/2}=\frac{p}{(x^2+p)^{3/2}}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{3px}{(x^2+p)^{5/2}}<0 \quad \text{對於} x>0.$$

因此曲線以斜率（gradient）$1/\sqrt{p}$ 離開原點，並穩定上升，同時向下彎曲（即曲線是凹 (concave) 的）。由於當 $x>0$ 時 $f(x)=1/\sqrt{1+p/x^2}$，故當 $x\to\infty$ 時 $f(x)\to 1$，且由下方趨近，所以 $y=1$ 是曲線永遠達不到的漸近線（asymptote）。



第 (ii) 部分

按試卷印刷的版本，代換式的分子是 b。這樣行不通：它雖然令 b^2-y^2 變得整齊，卻留下 $c^2(x^2+p)-b^2x^2$ 的平方根，而這並不是完全平方。真正可行的代換（亦即出題者的原意）分子是 c：

$$y=\frac{cx}{\sqrt{x^2+p}},\qquad p>0.$$

由第 (i) 部分，這是由 $x\in[0,\infty)$ 映射到 $y\in[0,c)$ 上的遞增映射，而這正是 $\sqrt{c^2-y^2}$ 有定義的範圍。於是

$$c^2-y^2=\frac{c^2(x^2+p)-c^2x^2}{x^2+p}=\frac{c^2p}{x^2+p},$$

$$b^2-y^2=\frac{b^2p+(b^2-c^2)x^2}{x^2+p},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\quad\text{（由第 (i) 部分）.}$$

由於 $c>0$ 及 $p>0$，有 $\sqrt{c^2-y^2}=c\sqrt{p}/\sqrt{x^2+p}$。代入得

$$I=\int\frac{x^2+p}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{c\sqrt{p}}\cdot\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{p}}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

取 $p=1$，得

$$I=\int\frac{1}{b^2+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x,$$

這正是所求的結果。所用的代換是 $y=cx/\sqrt{x^2+1}$，其反函數是 $x=y/\sqrt{c^2-y^2}$。

第一個積分。 取 $b=\sqrt{3}$ 及 $c=\sqrt{2}$。於是 $x=y/\sqrt{2-y^2}$，因此 $y=1$ 對應 $x=1$，而當 $y\to\sqrt{2}$ 時 $x\to\infty$。原被積函數在 $y=\sqrt{2}$ 處趨於無窮，其增長方式如 $(2-y^2)^{-1/2}$，屬於可積（integrable）的類型。代換後，積分變成 $[1,\infty)$ 上一個收斂（convergent）的反常積分（improper integral）：

$$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}y}{(3-y^2)\sqrt{2-y^2}}=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{3+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_1^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

想一想 新的積分中出現的是 $3y^2-1$ 和 $2y^2-1$，而舊的積分中則是 $3-y^2$ 和 $2-y^2$。哪一種代換能把 y^2 與常數的角色互換？

第二個積分。 設 $y=1/u$，其中 $u>0$，於是 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/u^2$。那麼

$$3y^2-1=\frac{3-u^2}{u^2},\qquad \sqrt{2y^2-1}=\frac{\sqrt{2-u^2}}{u},$$

而積分上下限 $y=\frac{1}{\sqrt2}$ 和 $y=1$ 分別變成 $u=\sqrt2$ 和 $u=1$。所以

$$\int_{1/\sqrt2}^{1}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}}=\int_{\sqrt2}^{1}\frac{1}{u}\cdot\frac{u^2}{3-u^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)=\int_1^{\sqrt2}\frac{\mathrm{d}u}{(3-u^2)\sqrt{2-u^2}}.$$

這正好就是第一個積分，因此其值同樣是 $\dfrac{\pi}{3\sqrt3}$。

第 (iii) 部分

同樣的倒數代換 $y=1/u$ 會把被積函數變成 $u/\big((3-u^2)\sqrt{2-u^2}\big)$。多出來的因子 u 提示我們設 $w=\sqrt{2-u^2}$，因為這樣便有 $3-u^2=1+w^2$。把兩步合併，就得到單一個代換：

$$w=\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}=\sqrt{2-\frac{1}{y^2}},\qquad \text{故}\qquad w^2=2-\frac{1}{y^2},\quad 2w\,\mathrm{d}w=\frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y.$$

當 $y\in[\frac{1}{\sqrt2},1]$ 時，w 由 0 遞增至 1。此外，$\mathrm{d}y=wy^3\,\mathrm{d}w$、$\sqrt{2y^2-1}=wy$，以及 $3y^2-1=y^2\big(3-\frac{1}{y^2}\big)=y^2(1+w^2)$。因此

$$\int_{1/\sqrt2}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}}=\int_0^1\frac{wy^3\,\mathrm{d}w}{y^2(1+w^2)\cdot wy}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}w}{1+w^2}=\frac{\pi}{4}.$$

（$y=1/\sqrt2$ 處的奇點（singularity）同樣只屬於 $(2y^2-1)^{-1/2}$ 這種可積的類型，而代換把它消除了。）

這其實是經過偽裝的第 (ii) 部分方法。設 $x=1/w$，便得 $y=x/\sqrt{2(x^2-1)}$，這正是取 $c^2=\frac12$ 及 $p=-1$ 時的一般代換。這就是第 (i) 部分容許 p 為負數的原因。

驗算

- $\pi/(3\sqrt3)\approx0.6046$，而 $\pi/4\approx0.7854$。先用三角代換消除端點的奇點，再對原積分進行數值積分（numerical integration），兩個數值均得到證實。
- 第一個積分的粗略大小檢查：在 $[1,\sqrt2]$ 上有 $1\le3-y^2\le2$，所以積分值介乎 $\frac12$ 倍與 1 倍的 $\int_1^{\sqrt2}(2-y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$ 之間。由此得出的範圍是 0.39 至 0.79，而 0.6046 穩穩落在其中。

- 在某一點檢驗第 (ii) 部分的恆等式：取 $b = \sqrt{3}$、$c = \sqrt{2}$ 及 $x = 1$，得 $y = 1$。此時被積函數的值是 $\frac{1}{2}$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \sqrt{2}/2^{3/2} = \frac{1}{2}$，兩者之積是 $\frac{1}{4} = 1/(3+1)$，與預期相符。

常見錯誤

- 堅持使用代換式中印出來的 b，結果卡住：需要消去的平方根是 $\sqrt{c^2 - y^2}$，所以縮放因子必須是 c。
- 轉換積分上下限時出錯。這裏 $y = \sqrt{2} = c$ 對應的是 $x = \infty$，而不是某個有限的 x 值。
- 漏掉 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$ 中的負號，或忘記把上下限調換回來，以致一個正的被積函數得出負的答案。

STEP 之外

這裏用到的代換屬於有理化代換（rationalising substitution）。它們把含有二次式平方根的被積函數變成有理函數，之後再用部分分式（partial fractions）或 $\tan^{-1}$ 便可完成。在大學一年級的分析（analysis）課程中，你會學到這裏所用反常積分背後的理論：含無窮上下限或無界被積函數的積分何時收斂，以及為何代換法對這類積分仍然成立。Bartle 與 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對這兩方面都有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。