詳細解答

# STEP III 2019，第 4 題

純數學 • 根與係數

**STEP III 2019，第 4 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

## 關鍵思路

交替出現的正負號正是韋達定理（Vieta's formulas）中的符號：以 $r_1, \ldots, r_n$ 為根的首一多項式（monic polynomial）是 $x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$，其中 $e_k$ 是從各根中任取 $k$ 個相乘所得的所有乘積之和。因此，「自反」（reflexive）其實只是說對每個 $k$ 都有 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$。這樣，較小的情況就只是幾條聯立方程，而各根的平方和 $e_1^2 - 2e_2$ 則給出 (ii) 中的恆等式。一旦證得 $a_n = 0$，就可以抽出因式 $x$，把多項式逐層剝減。

## 解答

以下一律以 $e_k$ 表示 $a_1, \ldots, a_n$ 的第 $k$ 個初等對稱函數（elementary symmetric function）。根據韋達定理，P 的根是 $a_1, \ldots, a_n$ 若且唯若

$$e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k \qquad \text{對} k = 1, 2, \ldots, n.$$

### 第 (i) 部分

**一次**。$\mathrm{P}(x) = x - a_1$ 的根是 $a_1$，所以所有這類多項式都是自反的：對任意實數 $a$，$\mathrm{P}(x) = x - a$。

**二次**。我們需要 $a_1 + a_2 = a_1$ 及 $a_1 a_2 = a_2$。由第一條得 $a_2 = 0$，此時第二條自動成立。所以對任意實數 $a$，$\mathrm{P}(x) = x^2 - ax = x(x - a)$；它的根 $a$ 和 0 確實分別是 $a_1$ 和 $a_2$。

三次。我們需要

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_2,$$
$$a_1a_2a_3 = a_3.$$

由第一條得 $a_3 = -a_2$。於是第二條變成 $a_1(a_2 + a_3) + a_2a_3 = a_2$，即 $-a_2^2 = a_2$，所以 $a_2 = 0$ 或 $a_2 = -1$。

- 若 $a_2 = 0$，則 $a_3 = 0$，而第三條方程變成 $0 = 0$。所以 $a_1$ 可以任意取值：$\mathrm{P}(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$。
- 若 $a_2 = -1$，則 $a_3 = 1$，而第三條方程給出 $-a_1 = 1$，所以 $a_1 = -1$。由此得

  $$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1),$$

  它的根 $-1, -1, 1$ 確實是 $a_1, a_2, a_3$。

所以次數不超過 3 的自反多項式是

$$x - a, \qquad x^2 - ax, \qquad x^3 - ax^2 \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad \text{以及} \qquad x^3 + x^2 - x - 1.$$

**第 (ii) 部分**

各根的平方和是

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

因為把 $e_1$ 平方後，每個 $a_i^2$ 出現一次，而每個乘積 $a_ia_j$（$i < j$）出現兩次。對自反多項式而言，$e_1 = a_1$ 且 $e_2 = a_2$，所以

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad \text{即} \qquad 2a_2 = -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2,$$

這就是所求的結果。（這對每個 $n \geq 2$ 都成立。）

現在假設各 $a_k$ 都是整數，$a_n \neq 0$，並用反證法（proof by contradiction）假設 $n > 3$。把 $a_2^2$ 移到另一邊並配方（completing the square），得

$$(a_2 + 1)^2 = 1 - \left(a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

> **想一想** 整數條件如何把這條方程「夾緊」？

左邊至少是 0，所以 $a_3^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$。但 $a_n$ 是非零整數，所以 $a_n^2 \geq 1$。因此這個和恰好等於 1：$a_n^2 = 1$，而其餘各項都是零，所以 $a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$，同時 $a_2 = -1$。由於 $n \geq 4$，數列 $a_3, \ldots, a_{n-1}$ 並非空的，特別地 $a_3 = 0$。現在，最後一條韋達方程說各根之積等於 $a_n$：

$$a_n = e_n = a_1a_2a_3 \cdots a_n = 0,$$

因為 $a_3 = 0$。這與 $a_n \neq 0$ 矛盾。所以 $n \leq 3$。

### 第 (iii) 部分

**抽出因式** $x$。假設 P 是次數 $n \geq 2$ 的自反多項式，且 $a_n = 0$。那麼 $\mathrm{P}(x) = x\mathrm{Q}(x)$，其中

$$\mathrm{Q}(x) = x^{n-1} - a_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

P 的根是 $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$，其中 $a_n = 0$，而因式 $x$ 對應其中一個根 0。所以 Q 的根就是餘下的 $a_1, \ldots, a_{n-1}$：Q 是自反的，而且係數相同(同樣是整數)。反過來，若 Q 是次數 $m$ 的自反多項式，係數為 $a_1, \ldots, a_m$，那麼 $x\mathrm{Q}(x)$ 的係數是 $a_1, \ldots, a_m, 0$，根是 $a_1, \ldots, a_m, 0$，所以它也是自反的。

**逐層剝減**。從任何整係數自反多項式 P 出發。只要它的次數至少是 2 而最後一個係數是 0，就抽出一個因式 $x$。這個過程最終停在 $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{R}(x)$，其中 $m \geq 0$，而 R 是次數為 $k$ 的整係數自反多項式，且要麼 $k = 1$，要麼最後一個係數 $a_k$ 非零。

- 若 $a_k \neq 0$，則由第 (ii) 部分得 $k \leq 3$（若 $k \leq 3$ 則無需證明）。根據第 (i) 部分的列表：$k = 1$ 時得 $x - a$，其中 $a \neq 0$；$k = 2$ 時最後一個係數必定是 0，所以沒有；$k = 3$ 時唯一滿足 $a_3 \neq 0$ 的是 $x^3 + x^2 - x - 1$。
- 若 $k = 1$ 且 $a_1 = 0$，則 $\mathrm{R}(x) = x$。

把 $\mathrm{R}(x) = x$ 併入 $x - a$ 中 $a = 0$ 的情況，再利用上述的逆命題得知每個乘以 $x^m$ 的倍式都是自反的，便知整係數自反多項式恰好是

$$x^m(x - a) \quad (m \geq 0,\ a \in \mathbb{Z}),$$
$$x^m(x^3 + x^2 - x - 1) = x^m(x+1)^2(x-1) \quad (m \geq 0).$$

## 驗算

- $x^2(x+1)^2(x-1) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ 的 $a_1, \ldots, a_5 = -1, -1, 1, 0, 0$，根是 $-1, -1, 1, 0, 0$：它是自反的。(ii) 中的恆等式變成 $2(-1) = -(1 + 1 + 0 + 0)$，成立。
- 用電腦搜尋所有 $n \leq 7$、$a_1, \ldots, a_n$ 取 $\{-3, \ldots, 3\}$ 中整數的情況，除上列者外沒有找到其他自反多項式；對 $n = 2, 3$ 在較小的有理數中搜尋，亦印證了第 (i) 部分的列表。

## 常見錯誤

- 遺漏含自由參數的多項式族：$x^2 - ax$ 和 $x^3 - ax^2$ 對每個實數 $a$ 都是自反的，而不只是對某些特殊值。

- 在 (ii) 中，求得 $a_n = \pm 1$、$a_2 = -1$ 便停下來。矛盾其實來自各根之積：當 $n \geq 4$ 時，$a_3, \ldots, a_{n-1}$ 中有零，所以積為零。
- 在 (iii) 中，只說「$a_n = 0$，所以除以 $x$」，卻沒有驗證商式仍然是自反的：一個零根對應因式 $x$，而餘下的根要與餘下的係數吻合。

## STEP 之外

方程組 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$ 是多項式方程組的一個小例子，其解構成一個代數簇（algebraic variety），在這裏是若干直線與孤立點的並集。「平方和 $= e_1^2 - 2e_2$」這個事實是牛頓（Newton）恆等式（Newton's identities）中的第一條；這些恆等式把各根的冪和與係數聯繫起來，是對稱函數理論的基礎。「若干整數的平方之和不超過 1」這一步，是丟番圖（Diophantine）論證中的典型手法。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）和 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）都是進一步探索這些概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。