詳細解答

STEP III 2019，第 3 題

純數學 • 矩陣的不變直線

> **STEP III 2019，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

點 (x, y) 是不變點（invariant point），當且僅當 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ 把它映到零，由此得到兩條線性方程（linear equations）。第 (i) 和第 (ii) 部分的所有內容，都源於追問：這兩條方程何時描述同一條直線？其條件是 $(a-1)(d-1) = bc$，亦即 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$。在第 (iii) 部分，我們把直線上的一般點代入變換，然後比較係數。

解答

第 (i) 部分

點 (x, y) 是不變點，當 $ax + by = x$ 且 $cx + dy = y$，即

$$(a-1)x = -by, \tag{1}$$

$$(d-1)y = -cx. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相乘，得 $(a-1)(d-1)xy = bc\,xy$，所以對 L_1 上每一點 (x, y) 都有

$$((a-1)(d-1) - bc)xy = 0$$

，此即所求。

至於第二個結果，我們需要 L_1 上一個滿足 $xy \neq 0$ 的點，這樣才可以除以 xy。

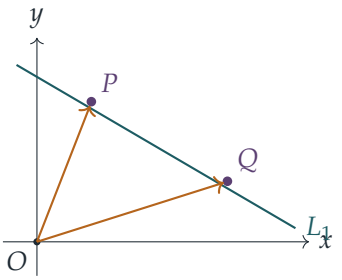
> **想一想** 如果 L_1 上每一點都有 $x = 0$ 或 $y = 0$，那又如何？

集合 $xy = 0$ 正是兩條坐標軸。一條位於兩軸之併集內的直線必定是其中一條坐標軸，所以除非 L_1 是坐標軸，否則它必含一個 $xy \neq 0$ 的點。於是除以 xy，便得 $(a-1)(d-1) =$

bc。

剩下的是坐標軸的情況。若 L_1 是 y 軸，則每個 $(0, y)$ 都是不變點，而 (1) 和 (2) 給出對所有 y 皆有 $by = 0$ 及 $(d-1)y = 0$。所以 $b = 0$ 且 $d = 1$，而 $(a-1)(d-1) = bc$ 兩邊都是 0。若 L_1 是 x 軸，同理得 $c = 0$ 且 $a = 1$，兩邊同樣是 0。因此在所有情況下都有 $(a-1)(d-1) = bc$。

現在假設 L_1 不經過原點。在 L_1 上取兩個不同的點 P 和 Q，其位置向量（position vectors）分別為 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$。



由於 O、P、Q 不共線，$\mathbf{p}$ 與 $\mathbf{q}$ 不平行，所以每個向量都可寫成 $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$。由線性性（linearity），

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{Ap} + \mu\mathbf{Aq} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} = \mathbf{v},$$

所以平面上每一點都是不變點，且 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$。（此時 $a = d = 1$ 及 $b = c = 0$，與 $(a-1)(d-1) = bc$ 吻合。）

第 (ii) 部分

假設 $(a-1)(d-1) = bc$。我們需要找一條直線，使 (1) 和 (2) 在其上都成立。

情況 $b \neq 0$。取直線 $(a-1)x + by = 0$；由於 $b \neq 0$，這確實是一條通過原點的直線。直線上每一點都滿足 (1)。在這條直線上 $y = -\frac{(a-1)x}{b}$，所以

$$cx + (d-1)y = cx - \frac{(a-1)(d-1)}{b}\,x = cx - \frac{bc}{b}\,x = 0,$$

因此 (2) 亦成立。所以 $(a-1)x + by = 0$ 是一條不變點直線（line of invariant points）。

情況 $b = 0$。此時條件變為 $(a-1)(d-1) = 0$，所以 $a = 1$ 或 $d = 1$。

- 若 $a \neq 1$，則 $d = 1$。方程 (1) 變成 $(a-1)x = 0$，所以 $x = 0$；而 (2) 變成 $cx = 0$，在 $x = 0$ 時成立。不變點直線就是 y 軸 $x = 0$。
- 若 $a = 1$，則 (1) 對每一點都成立，我們只需 (2)：$cx + (d-1)y = 0$。
  - 若 c 與 $d - 1$ 不同時為零，這是一條通過原點的直線，而且是一條不變點直線。

- 若 $c = 0$ 且 $d = 1$，則 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，每一點都是不變點，每一條直線都是不變點直線。

所以只要 $(a-1)(d-1) = bc$，就存在一條不變點直線。

第 (iii) 部分

由於 L_2 不經過原點，可把 L_2 寫成 $y = mx + k$，其中 $k \neq 0$。L_2 上的一般點是 $(x, mx + k)$，其像為

$$(X, Y) = \big((a + bm)x + bk,\ (c + dm)x + dk\big).$$

這條直線是不變直線（invariant line），當且僅當對每個實數 x 都有 $Y = mX + k$：

$$(c + dm)x + dk = m(a + bm)x + mbk + k.$$

兩邊都是 x 的一次式，且對所有 x 都相等，所以係數必須相同：

$$\text{常數項：}\quad dk = mbk + k, \tag{3}$$

$$\text{一次項係數，關於}x\text{：}\quad c + dm = am + bm^2. \tag{4}$$

想一想 我們在哪裏用到 L_2 不經過原點這個事實？

我們在 (3) 中用到它：因為 $k \neq 0$，可以除以 k，得 $d - 1 = mb$。把 $d = 1 + mb$ 代入 (4)，

$$c = am + bm^2 - dm = am + bm^2 - m - bm^2 = m(a - 1).$$

因此

$$bc = bm(a - 1) = (d - 1)(a - 1),$$

此即所求結果。（若 $k = 0$，方程 (3) 不提供任何資訊，這正是通過原點的直線可以在不滿足該條件下仍是不變直線的原因。旋轉 π 就是一例：它把每條通過 O 的直線映到自身，但 $(a-1)(d-1) = 4 \neq 0 = bc$。）

驗算

- 試取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$：此時 $(a-1)(d-1) = -2 = bc$。第 (ii) 部分預測不變直線為 $2x + 2y = 0$，即 $y = -x$，而確實有 $\mathbf{A}(1, -1)^{\mathrm{T}} = (1, -1)^{\mathrm{T}}$。
- 對於第 (iii) 部分，取 $m = 2$、$k = 1$、$a = 3$、$b = 1$。則 $d = 1 + mb = 3$ 及 $c = m(a-1) = 4$。$y = 2x + 1$ 上的點 $(1, 3)$ 映到 $(6, 13)$，而 $13 = 2 \times 6 + 1$。此外 $(a-1)(d-1) = 4 = bc$。

- 我們用電腦驗證了數以千計的隨機矩陣：所找到的每條滿足 $k \neq 0$ 的不變直線 $y = mx + k$ 都有 $d - 1 = mb$、$c = m(a-1)$ 及 $(a-1)(d-1) = bc$；而每條不經過原點的不動點直線都來自 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分除以 xy，卻沒有處理 L_1 是坐標軸的情況。
- 在第 (ii) 部分 $b = 0$ 時漏掉某個子情況，特別是 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，此時每條直線都符合。
- 在第 (iii) 部分混淆了*不變直線*（點仍留在直線上）與*不變點直線*（點本身不動），因而錯誤地設 $X = x$。

STEP 之外

條件 $(a-1)(d-1) = bc$ 就是 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$，表示 1 是 $\mathbf{A}$ 的特徵值（eigenvalue）。通過原點的不變點直線，就是該特徵值的特徵空間（eigenspace）。第 (iii) 部分說明，一條不經過原點的不變直線同樣迫使 1 成為特徵值。關係式 $c = m(a-1)$ 和 $d - 1 = mb$ 表示 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 的第二行是第一行的 m 倍，所以 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 的秩（rank）最多是 1，並把每一點沿平行於 L_2 的方向移動。關於特徵值、特徵向量（eigenvectors）及線性映射的幾何，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。