詳細解答

STEP III 2019，第 2 題

純數學 • 函數方程

STEP III 2019，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 3.8 節由加法公式決定的函數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/addition-laws.html

關鍵思路

函數方程（functional equation）有一個特點：只要知道函數在某一點附近的表現，就能確定整個函數。代入 $x = y = 0$ 可以確定函數在 0 的值；然後在一般的 x 處寫出差商（difference quotient），再利用函數方程把它化成在 0 處的差商，而我們知道這個差商的極限（limit）是 k。這樣便得到一條微分方程（differential equation），再配合先前求得的初始值（initial value）把它解出來。

解答

第 (i) 部分

在 0 的值。在函數方程中代入 $x = y = 0$：$f(0) = f(0)^2$，所以 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$。

假設 $f(0) = 0$。代入 $y = 0$，對每個 x 都有 $f(x) = f(x)f(0) = 0$，所以 f 是零函數，而 $f'(0) = 0$。這與 $f'(0) = k \neq 0$ 矛盾。因此 $f(0) = 1$。

導數（derivative）。由 $(*)$ 及取 $y = h$ 的函數方程，

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}.$$

由於 $f(0) = 1$，最後的極限就是 $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$，根據 $(*)$ 在 $x = 0$ 的情況，它等於

$\mathrm{f}'(0) = k$。所以

$$\mathrm{f}'(x) = k\,\mathrm{f}(x),$$

即為所求。（我們可以把 $\mathrm{f}(x)$ 提到極限之外，因為它與 h 無關。）

求解。與其除以 f（這需要 $\mathrm{f} \neq 0$），不如考慮 $u(x) = \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{f}(x)$。於是

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-kx}\big(\mathrm{f}'(x) - k\,\mathrm{f}(x)\big) = 0,$$

所以 u 是常數，等於 $u(0) = \mathrm{f}(0) = 1$。因此

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}.$$

這確實滿足所有條件：$\mathrm{e}^{k(x+y)} = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky}$，而且它在 0 的導數是 k。

第 (ii) 部分

在 0 的值。代入 $x = y = 0$：

$$\mathrm{g}(0) = \frac{2\mathrm{g}(0)}{1+\mathrm{g}(0)^2} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2 - 1\big) = 0,$$

所以 $\mathrm{g}(0) \in \{0, 1, -1\}$。由於對所有 x 都有 $|\mathrm{g}(x)| < 1$，必然有 $\mathrm{g}(0) = 0$。另外留意，$|\mathrm{g}| < 1$ 保證了 $1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y) > 0$，所以函數方程永遠不會出現除以零的情況。

差商。利用取 $y = h$ 的函數方程，並把各項通分，

$$\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x) = \frac{\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(h) - \mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)} = \frac{\mathrm{g}(h)\big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big)}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

除以 h，

$$\frac{\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x)}{h} = \big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big) \cdot \frac{\mathrm{g}(h)}{h} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

? **想一想** 當 $h \to 0$ 時，右邊每個因子會怎樣變化？

第一個因子不涉及 h。由於 $\mathrm{g}(0) = 0$，中間的因子就是 $\dfrac{\mathrm{g}(0+h) - \mathrm{g}(0)}{h}$，它趨向 $\mathrm{g}'(0) = k$。至於最後的因子，我們需要 $\mathrm{g}(h) \to \mathrm{g}(0) = 0$：這是成立的，因為 g 在 0 可微（differentiable），因此在 0 連續（continuous）。所以最後的因子趨向 1，而

$$\mathrm{g}'(x) = k\big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big).$$

求解。因為 $|\mathrm{g}(x)| < 1$，因子 $1 - \mathrm{g}(x)^2$ 永不為零，所以我們可以分離變量（separation of variables）：

$$\int \frac{\mathrm{d}g}{1 - g^2} = \int k\,\mathrm{d}x.$$

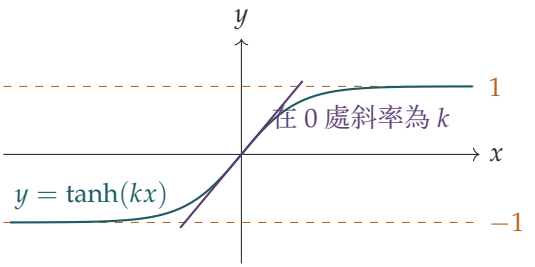
利用部分分式（partial fractions），$\dfrac{1}{1-\mathrm{g}^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{g}} + \dfrac{1}{1-\mathrm{g}}\right)$，而 $1 \pm \mathrm{g}$ 兩者皆為正數，所以

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{g}(x)}{1-\mathrm{g}(x)} = kx + c.$$

在 $x = 0$ 時左邊等於 $\frac{1}{2}\ln 1 = 0$，所以 $c = 0$。因此 $\dfrac{1+\mathrm{g}}{1-\mathrm{g}} = \mathrm{e}^{2kx}$，解出 g，

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1} = \tanh(kx).$$

這確實可行：$|\tanh(kx)| < 1$；加法公式(addition formula)$\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$ 正正就是這條函數方程；而 $\tanh(kx)$ 在 0 的導數是 k。



驗算

- 在 (i) 中，取 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}$，$k = 1$，$x = 0.3$，$y = 0.5$：$\mathrm{e}^{0.3}\mathrm{e}^{0.5} = 1.3499 \times 1.6487 = 2.2255 = \mathrm{e}^{0.8}$。
- 在 (ii) 中，取 $k = 1$，$x = 0.3$，$y = 0.5$：$\tanh 0.3 = 0.29131$，$\tanh 0.5 = 0.46212$，而 $(0.29131 + 0.46212)/(1 + 0.29131 \times 0.46212) = 0.66404 = \tanh 0.8$。
- 兩個答案亦已用電腦對大量隨機的 k、x、y 作出驗證，包括導數關係 $\mathrm{f}' = k\mathrm{f}$ 及 $\mathrm{g}' = k(1-\mathrm{g}^2)$。
- 兩部分是互相關連的：$\tanh(kx) = \dfrac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}$ 是由第 (i) 部分的指數函數構成，只是以 $2k$ 代替 k。

常見錯誤

- 沒有給出理由便捨棄 $\mathrm{f}(0) = 0$ 或 $\mathrm{g}(0) = \pm 1$。條件 $k \neq 0$ 及 $|\mathrm{g}| < 1$ 正是為了排除這些情況而設的。
- 在分母中令 $\mathrm{g}(h) \to 0$ 卻沒有說明原因：這需要 g 在 0 連續，而連續性來自可微性。

► 除以 f 或 $1 - g^2$ 之前沒有檢查它是否非零。

STEP 之外

這些都是柯西型函數方程（*Cauchy-type functional equations*）的例子。大學第一個分析（analysis）課程會證明：在遠比可微性弱的假設下，例如只在某一點連續，指數方程 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 便迫使 $f(x) = e^{kx}$（或 $f \equiv 0$）；而如果沒有任何正則性（regularity）條件，則會出現極其怪異的解。tanh 方程正是狹義相對論（special relativity）中的速度相加定律，在那裏速度的 $\tanh^{-1}$（稱為快度（rapidity））只需直接相加。想了解背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。