詳細解答

STEP III 2019，第 10 題

力學 • 斜碰撞

STEP III 2019，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

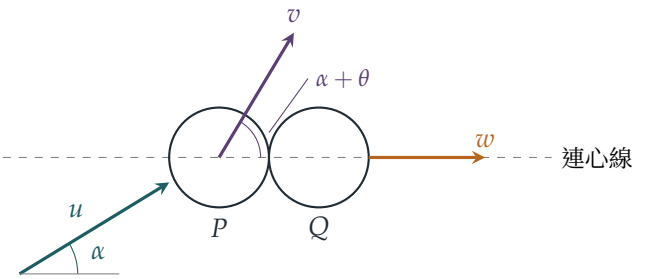
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

把每個速度分解為沿連心線（line of centres）的分量和垂直於連心線的分量。由於兩球都是光滑的，衝量（impulse）只沿連心線作用，所以 P 的垂直分量保持不變，而 Q 則沿該直線運動。動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）在連心線方向上的應用，就跟一維碰撞完全一樣。餘下的只是三角學。

解答

把 P 和 Q 視為放在光滑水平桌面上、質量同為 m 的光滑球體。取碰撞瞬間的連心線為 x 方向，由 P 指向 Q；並設 y 方向在運動平面內與之垂直，指向 P 初速度所在的一側。



第 (i) 部分

碰撞前，P 沿連心線的分量為 $u\cos\alpha$，垂直於連心線的分量為 $u\sin\alpha$。

光滑球體之間的接觸力沿連心線作用。因此 P 在垂直於該直線的方向上不受衝量，P 的

垂直分量保持不變。此外，Q 起初靜止，而且只受沿連心線的衝量，所以它以速率 w 沿該直線運動。

想一想 為甚麼 P 的新方向與連心線所成的角是 $\alpha+\theta$，而不是 $\alpha-\theta$？

P 所受的衝量沿連心線指向後方。它把 P 的 x 分量由 $u\cos\alpha$ 減小至下面求得的 v_x，而不影響 y 分量。因此速度方向偏離連心線，與該直線所成的角由 α 增大至 $\alpha+\theta$。下面我們會證實當 $e<1$ 時 $v_x>0$，所以 $0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$。

碰撞後，P 沿連心線的分量為 $v\cos(\alpha+\theta)$，垂直於連心線的分量為 $v\sin(\alpha+\theta)$。令垂直分量相等，得

$$u\sin\alpha = v\sin(\alpha+\theta),$$

正如所求。

沿連心線方向，由動量守恆（兩者質量相等，所以可約去 m）得

$$u\cos\alpha = v\cos(\alpha+\theta)+w. \tag{1}$$

代入第一個結果中的 $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$，

$$\begin{aligned} w &= \frac{v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) \\ &= \frac{v\big[\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)\sin\alpha\big]}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

這裏用了 $\sin\big((\alpha+\theta)-\alpha\big)$ 的展開式。所以

$$w = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

這個結果有一個漂亮的詮釋。向量形式的動量守恆給出 $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$，沿垂直於 $\mathbf{u}$ 的方向分解，便得 $0 = v\sin\theta - w\sin\alpha$。

第 (ii) 部分

沿連心線應用牛頓實驗定律：分離速率等於接近速率的 e 倍：

$$w - v\cos(\alpha+\theta) = e\,u\cos\alpha. \tag{2}$$

代入第 (i) 部分的 $w = v\sin\theta/\sin\alpha$ 和 $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$：

$$\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) = \frac{e\,v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

兩邊乘以 $\sin\alpha/v$（因為 $v>0$ 且 $\sin\alpha\neq 0$，所以可以這樣做），整理後得

$$\sin\theta = \cos(\theta+\alpha)\sin\alpha + e\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha,$$

正如所求。

要求 $\tan\theta$，先把兩個複角展開：

$$\sin\theta = (\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\sin\alpha + e(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\cos\alpha.$$

把含 $\sin\theta$ 的項移到左邊：

$$\sin\theta\left(1 + \sin^2\alpha - e\cos^2\alpha\right) = (1+e)\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha.$$

兩邊除以 $\cos\theta\cos^2\alpha$，並記 $t = \tan\alpha$，利用 $1/\cos^2\alpha = 1 + t^2$：

$$\tan\theta\left(1 + t^2 + t^2 - e\right) = (1+e)\,t, \qquad \text{所以} \qquad \tan\theta = \frac{(1+e)\tan\alpha}{1 - e + 2\tan^2\alpha}.$$

由於 $e < 1$，分母為正，所以 $\tan\theta > 0$，而 θ 的確是一個銳角偏轉。

$\tan\theta$ 的最大值

當 α 取遍所有銳角時，$t = \tan\alpha$ 取遍 $(0, \infty)$ 中的每一個值。對於 $t > 0$，可以把分子和分母同除以 t：

$$\tan\theta = \frac{1+e}{\dfrac{1-e}{t} + 2t}.$$

? **想一想** 不用微積分，怎樣求這個式子的最大值？

盡量令分母最小。$(1-e)/t$ 和 $2t$ 都是正數，所以由算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality），

$$\frac{1-e}{t} + 2t \geq 2\sqrt{\frac{1-e}{t}\cdot 2t} = 2\sqrt{2(1-e)},$$

等號成立當且僅當 $(1-e)/t = 2t$，即 $\tan\alpha = \sqrt{(1-e)/2}$。這是一個真正的銳角，所以最小值確實能夠達到。因此 $\tan\theta$ 的最大值為

$$\tan\theta_{\max} = \frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}.$$

（對 t 求導，會得到相同的駐點 $2t^2 = 1 - e$。）

驗算

- 接近彈性的極限 $e \to 1$：兩球交換沿連心線的分量，所以 P 只剩下 $u\sin\alpha$，並沿垂直於連心線的方向運動。於是 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$，而 $\tan\theta = \cot\alpha$。公式給出 $\tan\theta = 2t/(2t^2) = 1/t$，兩者一致。最大值趨於無窮大，這是應有的結果，因為當 $\alpha \to 0$ 時 $\theta \to \frac{\pi}{2}$。

- 當 $e = \frac{1}{2}$ 時，最大值為 $\frac{3/2}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$，在 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$（約 26.6°）時達到。以細小步長掃描 α，證實最大值為 0.75。用電腦模擬大量隨機碰撞，亦重現了題目中全部四個結果。
- α 很小（近乎正面碰撞）：$\tan\theta \approx \frac{1+e}{1-e}\alpha \to 0$，所以正面碰撞不會造成偏轉，與預期相符。

常見錯誤

- 把牛頓實驗定律應用於整個速率，而不是沿連心線的分量。恢復（restitution）只作用於衝量的方向。
- 把 P 的新角度寫成 $\alpha - \theta$。衝量減去了部分沿連心線的分量，所以 P 是轉離該直線的。
- 忘記正是 $e < 1$ 令 $1 - e + 2\tan^2\alpha$ 為正，也忘記 $\tan\alpha$ 取遍整個 $(0, \infty)$，因此算術—幾何平均不等式的等號情況確實能夠達到。

STEP 之外

光滑球體的斜碰（oblique collision）是散射（scattering）最簡單的例子。在這道題中，同樣兩條守恆定律分別沿一條直線及垂直於該直線應用，而這個想法可以推廣到粒子物理和氣體分子運動論（kinetic theory of gases）。對於等質量的彈性碰撞，結果就是著名的「碰撞後兩速度互相垂直」。在質心參考系（centre-of-mass frame）中，每次碰撞都只是把相對速度旋轉（在本題中還會把它縮短），這是理解上述所有結果的一個更簡潔的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是從這個觀點討論碰撞的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。