詳細解答

STEP III 2019，第 1 題

純數學 • 耦合微分方程

> **STEP III 2019，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

當 $k = 1$ 時，方程組的右方正好是把 $x + \mathrm{i}y$ 乘以一個複數常數所得的結果，因此這對方程可以合併為關於 $z = x + \mathrm{i}y$ 的單一方程 $\dot{z} = cz$。這樣一來，運動就變成旋轉配合指數衰減（exponential decay）：一條螺線（spiral）。當 $k = 0$ 時，耦合只朝一個方向：x 不依賴 y，所以我們先解出 x，再把它代入 y 的方程。

解答

第 (i) 部分

當 $k = 1$ 時，我們有 $\dot{x} = -x - y$ 及 $\dot{y} = x - y$。設 $z = x + \mathrm{i}y$，則

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} &= (-x - y) + \mathrm{i}(x - y) \\ &= (-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (-1 + \mathrm{i})z,\end{aligned}$$

這可以透過展開 $(-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y$ 來確認。由 $z(0) = 1$，解為

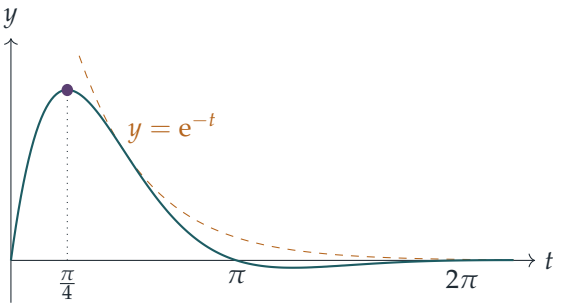
$$z = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t),$$

因此

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

（如果你想避免使用複數（complex numbers）：把第一條方程微分，再消去 y，得到 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$，其輔助方程（auxiliary equation）的根為 $-1 \pm \mathrm{i}$，然後利用 $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = -1$。）

y 對 t 的圖像。這是一條位於包絡線（envelope）$\pm e^{-t}$ 之內的正弦波，所以是一個阻尼振盪（damped oscillation）。它在 $t = n\pi$ 處為零，而其轉向點（turning point）位於 $\dot{y} = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$ 之處，即 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$。每個相繼的峯值都縮小 $e^{-\pi} \approx 0.04$ 倍，因此在第一個隆起之後，若按真實比例繪畫，振盪幾乎看不見。



路徑。以極式表示，$z = e^{-t}e^{it}$ 的模（modulus）為 $r = e^{-t}$，輻角（argument）為 $\theta = t$。因此路徑是螺線

$$r = e^{-\theta}, \qquad \theta \geq 0,$$

從 $(1,0)$ 出發，以逆時針方向捲向原點，只有在 $t \to \infty$ 時才到達原點。起始時 $\dot{x} = -1$ 及 $\dot{y} = 1$，所以它離開 $(1,0)$ 時向左上方移動。每轉一圈，與原點的距離便縮小 $e^{-2\pi} \approx 0.002$ 倍，因此按真實比例繪畫時只看得見第一圈。

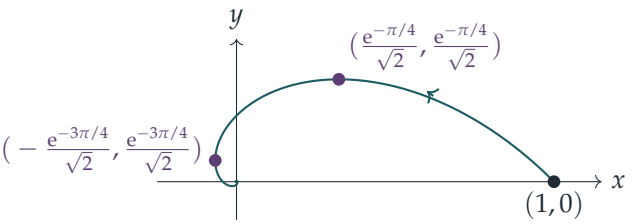
y 的最大值。y 的轉向點位於 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$。在 $t = \frac{\pi}{4}$ 時，$y = e^{-\pi/4}/\sqrt{2} > 0$。對所有 $t \geq \frac{\pi}{2}$，我們有 $y \leq e^{-t} \leq e^{-\pi/2}$，而 $e^{-\pi/2} < e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$，因為這等價於 $\sqrt{2} < e^{\pi/4} \approx 2.19$。在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上唯一的轉向點是 $t = \frac{\pi}{4}$。所以 y 的最大值出現在

$$\left(\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (0.322,\ 0.322).$$

x 的最小值。現在 $\dot{x} = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$，它在 $\tan t = -1$ 時為零，即 $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$。要使 $x < 0$，需要 $\cos t < 0$，這就選出 $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$，得 $x = -e^{-t}/\sqrt{2}$；由於 e^{-t} 是遞減的，所以在這些 t 中取最小者時 x 最負，即 $t = \frac{3\pi}{4}$。（最小值必定出現在其中一個轉向點，因為 $x(0) = 1 > 0$，而且當 $t \to \infty$ 時 $x \to 0$。）所以 x 的最小值出現在

$$\left(-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (-0.067,\ 0.067).$$

兩點都位於直線 $y = \pm x$ 上，這正如預期：在螺線上，y 在路徑朝 x 方向前進之處取最大值，而 x 在路徑朝 y 方向前進之處取最小值。



第 (ii) 部分

當 $k = 0$ 時，第一條方程單獨就是 $\dot{x} = -x$，所以由 $x(0) = 1$，

$$x = e^{-t}.$$

於是 $\dot{y} + y = e^{-t}$。乘以積分因子（integrating factor）e^t，得 $\frac{d}{dt}(ye^t) = 1$，所以 $ye^t = t + c$，再由 $y(0) = 0$ 得 $c = 0$：

$$y = te^{-t}.$$

想一想 怎樣把它化為路徑的方程？

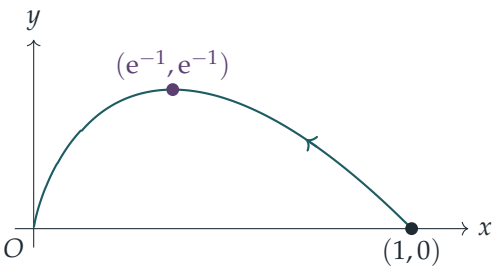
消去 t：由於 $x = e^{-t}$，我們有 $t = -\ln x$，因此

$$y = -x \ln x, \qquad 0 < x \leq 1.$$

當 t 由 0 增至 ∞ 時，x 由 1 遞減趨向 0，所以質點從 $(1, 0)$ 出發，沿這條曲線向左移動，當 $t \to \infty$ 時趨近原點。

繪圖要點：

- $\frac{dy}{dx} = -\ln x - 1$，在 $x = e^{-1}$ 時為零。所以最高點是 (e^{-1}, e^{-1})，在 $t = 1$ 時到達。
- 在 $(1, 0)$ 處斜率為 -1，與 $t = 0$ 時的 $\dot{x} = -1$、$\dot{y} = 1$ 吻合。
- 當 $x \to 0^+$ 時，$x \ln x \to 0$，所以 $y \to 0$；但斜率 $-\ln x - 1 \to +\infty$，所以曲線進入原點時與 y 軸相切。
- 對 $0 < x < 1$ 有 $y > 0$，所以整條路徑都在 x 軸之上。



留意與第 (i) 部分的對比：當 $k = 0$ 時不再有任何旋轉，所以質點從不穿越坐標軸，只是沿曲線彎入原點。

驗算

- 代回原方程：對於 $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$，$\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -x - y$，符合要求；$\dot{y}$ 的驗算方法相同。兩組解亦都滿足 $x(0) = 1$、$y(0) = 0$。
- 以細小時間步長對方程作數值推進，可重現兩組解，並確認在第 (i) 部分中 y 的最大值約為 0.3224，出現在 $t \approx 0.785$；x 的最小值約為 -0.0670，出現在 $t \approx 2.356$；而在第 (ii) 部分中 y 在 $t = 1$ 時達到峯值 $1/\mathrm{e} \approx 0.3679$。
- 對 (ii) 的合理性檢查：$y = t\mathrm{e}^{-t}$ 是熟悉的「重根」形式，這是合理的，因為該方程組的矩陣有重特徵值（repeated eigenvalue）-1。

常見錯誤

- 把 x 的最小值取在 $t = -\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$：那裏同樣有 $\dot{x} = 0$，但那裏 $x > 0$（是局部極大值）。要檢查 $\cos t$ 的正負號。
- 忘記螺線只有在 $t \to \infty$ 時才到達原點，或把它畫成順時針捲入：$\theta = t$ 遞增，所以它是逆時針捲入的。
- 在 (ii) 中漏掉原點處的鉛垂切線：$y \to 0$ 但 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to \infty$。

STEP 之外

任何線性方程組（linear system）$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 的行為都由 A 的特徵值決定。這裏 $A = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特徵值是 $-1 \pm \sqrt{-k}$：當 $k = 1$ 時它們是一對複數 $-1 \pm \mathrm{i}$，給出穩定螺旋點（stable spiral）；當 $k = 0$ 時有重特徵值 -1，給出退化結點（degenerate node）；而當 $k < 0$ 時則會得到兩個實特徵值。以這種方法對不動點（fixed point）分類（即相平面分析（phase-plane analysis））是大學一年級的核心課題。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）對此有詳細講解，並附有大量圖像。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。