詳細解答

STEP II 2019，第 9 題

力學 • 拋體與原點的距離

> **STEP II 2019，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 11.10 節會朝你飛回來的球中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/coming-back.html

關鍵思路

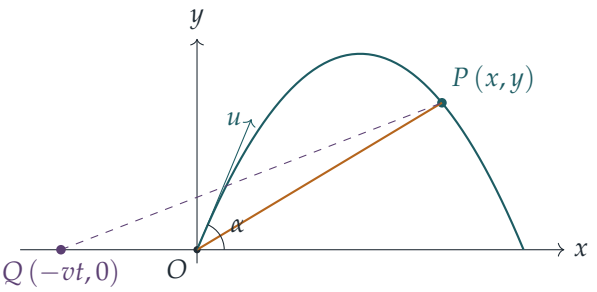
距離本身不易求導，但距離的平方卻很容易：OP 遞增，當且僅當 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OP^2) > 0$。對 $x^2 + y^2$ 求導（differentiate），會得到 t 乘以一個關於 t 的二次式，於是整道題就變成「這個二次式何時為正？」，而這可由它的判別式（discriminant）回答。第 (ii) 部分是同一個計算，只是在水平距離上加入 Q 的運動。

解答

把 P 和 Q 視為質點（particle），忽略空氣阻力，並以 O 為原點，x 軸取水平方向（沿 P 的運動方向），y 軸取鉛直向上。記 $s = \sin\alpha$ 及 $c = \cos\alpha$，由於 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，兩者皆為正。在時間 t，

$$x = uct, \qquad y = ust - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而當 $y = 0$ 再次成立時 P 落地，時間為 $T = \dfrac{2us}{g}$。



第 (i) 部分

設 $r = OP$，則 $r^2 = x^2 + y^2$；利用 $\dot{x} = uc$ 及 $\dot{y} = us - gt$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= 2\left[u^2c^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= 2t\left[u^2c^2 + u^2s^2 - \tfrac{3}{2}usgt + \tfrac{1}{2}g^2t^2\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2\right),\end{aligned}$$

這裏用了 $c^2 + s^2 = 1$。由於飛行期間 $r > 0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}$ 與 $\dot{r}$ 同號；又由於 $t > 0$，其符號與下式相同：

$$f(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2.$$

這個二次式的首項係數為正，判別式為

$$9u^2s^2g^2 - 8u^2g^2 = u^2g^2\left(9s^2 - 8\right).$$

若 $s < \frac{2\sqrt{2}}{3}$，則 $9s^2 < 8$（因為 $s > 0$），故判別式為負，對所有 t 皆有 $f(t) > 0$。因此在整個飛行過程中 $\dot{r} > 0$：OP 遞增。

若 $s > \frac{2\sqrt{2}}{3}$，則判別式為正，f 有兩個相異的根

$$t_{1,2} = \frac{u\left(3s \mp \sqrt{9s^2 - 8}\right)}{2g},$$

且當 $t_1 < t < t_2$ 時 $f(t) < 0$。兩根皆為正（它們的和 $3us/g$ 與積 $2u^2/g^2$ 皆為正）。我們必須檢查這段區間確實出現在 P 仍在空中的時候。

想一想 這個二次式在某處變為負值，但我們怎樣知道這發生在 P 落地之前？

計算 f 在落地時刻的值：

$$f(T) = g^2 \cdot \frac{4u^2s^2}{g^2} - 3usg \cdot \frac{2us}{g} + 2u^2 = 2u^2(1 - s^2) = 2u^2c^2 > 0.$$

所以 T 不在兩根之間。但 f 的頂點位於 $t = \frac{3us}{2g} < \frac{2us}{g} = T$，所以 T 在頂點右方；既然它不在 $[t_1, t_2]$ 之內，就必然有 $T > t_2$。因此 $0 < t_1 < t_2 < T$，而當 $t_1 < t < t_2$ 時 $\dot{r} < 0$：OP 在 P 落地前的某段時間遞減，得證。

第 (ii) 部分

Q 在光滑地面上以恆定速率 v 朝遠離 P 那一側的方向滑行，所以在時間 t 它位於 $(-vt, 0)$。P 與 Q 的水平距離為 $x + vt = wt$，其中

$$w = uc + v > 0,$$

而鉛直距離為 y。所以 $QP^2 = w^2t^2 + y^2$，與之前完全一樣，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(QP^2\right) &= 2\left[w^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2w^2 + 2u^2s^2\right).\end{aligned}$$

飛行期間其符號與 $h(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2(w^2 + u^2s^2)$ 相同，而 h 的判別式為

$$9u^2s^2g^2 - 8g^2\left(w^2 + u^2s^2\right) = g^2\left(u^2s^2 - 8w^2\right).$$

這個判別式為負，當且僅當 $8w^2 > u^2s^2$，即（由於 w 和 us 皆為正）$2\sqrt{2}\,w > us$。代入 $w = uc + v$，

$$2\sqrt{2}\,(uc + v) > us \iff 2\sqrt{2}\,v > \left(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right)u.$$

所以在題設條件下，對所有 t 皆有 $h(t) > 0$，因此當 $t > 0$ 時 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QP^2) > 0$，$QP$ 在 P 的整個飛行過程中遞增，得證。

與第 (i) 部分相同的論證（現在 $h(T) = 2w^2 > 0$）顯示，當不等式嚴格反轉時，QP 確實會在 P 落地前遞減一段時間，所以除了等號成立的邊界情況外，這個條件其實也是必要條件。

驗算

- 在第 (ii) 部分中令 $v = 0$，得 $2\sqrt{2}\cos\alpha > \sin\alpha$，即 $\tan\alpha < 2\sqrt{2}$，即 $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$：正是第 (i) 部分的結果，理應如此，因為此時 Q 一直停在 O。
- 臨界角為 $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$，與 u 和 g 無關，這正是量綱分析(dimensional analysis)所要求的（唯一可用的無量綱量是 α）。
- 取 $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\sin\alpha = 0.97$，兩根為 $t_1 \approx 1.14\,\mathrm{s}$ 和 $t_2 \approx 1.83\,\mathrm{s}$，都在落地時刻 $T \approx 1.98\,\mathrm{s}$ 之前。用電腦逐步模擬整個飛行過程，證實 OP 在這兩個時刻之間減少；而且在大量隨機的 u、α、v 之下，距離 QP 遞增恰好與第 (ii) 部分的不等式成立相吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只停留於「判別式為正」：你必須證明 OP 的下降發生在 P 落地之前，而不是之後。
- 把 Q 放在 $(vt, 0)$：Q 是朝遠離 P 那一側移動，所以它與 P 的水平距離是 $uct + vt$。
- 漏掉因子 t，或者約去它時沒有指出 $t > 0$。

STEP 之外

研究 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2 = 2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ 的符號，是判斷物體正在接近還是遠離的標準方法；它在軌道力學（orbital mechanics）和兩物體的相對運動（relative motion）中一再出現，而第 (ii) 部分其實就是關於 P 相對於 Q 的位置的問題。一個拋射體若以比約 $70.5°$ 更陡的角度拋出，在飛行的一段時間內會朝拋擲者回來——這個巧妙的事實是力學教科書的熱門例子。想了解更多，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。