詳細解答

# STEP II 2019，第 8 題

純數學 • 矩陣的積性函數

**STEP II 2019，第 8 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.3 節甚麼才算行列式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/determinant-axioms.html

## 關鍵思路

一切都源於單一法則 $f(\mathbf{MN}) = f(\mathbf{M})f(\mathbf{N})$，只要把它套用到精心挑選的乘積上即可。每次的竅門都是找出同一個矩陣的兩種不同寫法，或者找出一個等於它自身與另一矩陣之乘積的矩陣，然後比較 f 的值。行列式（determinant）正是這樣的一個函數，所以它能幫助我們預料答案應該是甚麼；但我們絕不能假設 f 就是行列式。

## 解答

### 第 (i) 部分

由於 $\mathbf{MI} = \mathbf{M}$，

$$f(\mathbf{M}) = f(\mathbf{MI}) = f(\mathbf{M})\, f(\mathbf{I}).$$

題目給出 $f(\mathbf{M}) \neq 0$，因此可以兩邊同除以它，得 $f(\mathbf{I}) = 1$。

（若沒有這個假設，便無法得出此結論：恆等於零的函數同樣是可乘的（multiplicative）。）

### 第 (ii) 部分

直接相乘可得 $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$，因此

$$f(\mathbf{J})^2 = f(\mathbf{J}^2) = f(\mathbf{I}) = 1.$$

故此 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$；又因為 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$。

**想一想** 乘以 **J** 對一個矩陣有甚麼作用？

左乘 **J** 會交換兩行（rows）；右乘則會交換兩列（columns）：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

對兩式分別取 f，並利用 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$，得

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

第一式給出 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$；把第二式乘以 $-1$，便知道這也等於 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$，正如所求。

### 第 (iii) 部分

設 **A** 的第一行為 $(a \quad b)$，第二行為它的 $\lambda$ 倍。設 **B** 為兩行相同的矩陣，並在 **K** 中取 $k = \lambda$。左乘 **K** 會把第二行乘以 $k$，因此

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{KB}.$$

交換 **B** 的兩行後矩陣保持不變，所以由第 (ii) 部分（取 $c = a$、$d = b$）得

$$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B}),$$

這迫使 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。因此 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\,\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。這對每個實數 $\lambda$ 都成立，包括 $\lambda = 0$。

### 第 (iv) 部分

首先計算這三個矩陣。當 $k \neq 0$ 時，$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$，而且

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

接着，以 **K** 作共軛（conjugation）不會改變 f 的值。事實上 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\,\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}).$$

**想一想** $k$ 取哪些值時，$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$ 會變成 $\mathbf{P}^2$ 和 $\mathbf{P}^{-1}$？

取 $k=2$ 得 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}=\mathbf{P}^2$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})=\mathrm{f}(\mathbf{P}^2)=\mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

因此 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=0$ 或 $1$。

取 $k=-1$ 得 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}=\mathbf{P}^{-1}$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1})=\mathrm{f}(\mathbf{P})$。但 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1})=\mathrm{f}(\mathbf{I})=1$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})^2=1,$$

特別地 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\neq 0$。綜合兩個結果，

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})=1.$$

## 驗算

行列式滿足所有假設：它是可乘的，$\det\mathbf{I}=1$ 而且 $\det\mathbf{J}=-1$。它亦與我們的所有結論吻合：交換兩行或兩列會改變其正負號，兩行成比例的矩陣的行列式為 $0$，以及 $\det\mathbf{P}=1$。一個較不明顯的例子是 $\mathrm{f}(\mathbf{M})=\operatorname{sgn}(\det\mathbf{M})\,|\det\mathbf{M}|^{0.7}$。我們用電腦對數以千計的隨機矩陣作檢驗，證實這兩個函數都滿足可乘法則、行與列的交換恆等式、兩行成比例時 $\mathrm{f}(\mathbf{A})=0$，以及 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=1$。

## 常見錯誤

- 假設 $\mathrm{f}=\det$。題目要求你單憑可乘性推導出這些性質；行列式只是一個參考。
- 未加解釋便使用 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})=1/\mathrm{f}(\mathbf{K})$。這需要第 (i) 部分的 $\mathrm{f}(\mathbf{I})=1$，以及 $k\neq 0$，使 $\mathbf{K}$ 可逆。
- 停在 $\mathrm{f}(\mathbf{P})^2=\mathrm{f}(\mathbf{P})$，忘記排除 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=0$ 的情況。

## STEP 之外

像 f 這樣保持乘法的映射，是從 $2\times 2$ 可逆矩陣所成的羣（group）到非零實數的一個同態（homomorphism）。第 (iv) 部分是一個經典論證的開端：像 $\mathbf{P}$ 這樣的錯切矩陣（shear matrix）都是交換子（commutator）的乘積，所以每個這樣的同態都把它們映射到 $1$，最終 f 只取決於行列式。你亦可以證明：行列式是唯一一個對每一行都是線性的、交錯的（alternating），並且在 $\mathbf{I}$ 處等於 $1$ 的函數。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是從這類性質出發建構行列式，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則涵蓋同態的內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。