詳細解答

STEP II 2019，第 7 題

純數學 • 向量與純量積

> **STEP II 2019，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

對於單位向量（unit vector），長度和角度都可以由標量積（scalar product）得出：$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。因此訣竅是把「總和為零」這個條件拆開，一些向量放在一邊，其餘放在另一邊，然後計算兩邊長度的平方。這樣便把向量方程轉化為標量積之間的等式，而這些等式就能告訴我們圖形的形狀。

解答

以下我們會一直用到這個事實：對於單位向量 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$，

$$|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

第 (i) 部分

由於 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=-\mathbf{c}$，兩邊取長度的平方，得

$$2+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2 = 1,$$

所以 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$，得證。

這個條件對 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是對稱的，所以用同樣的方法（寫成 $\mathbf{b}+\mathbf{c}=-\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{c}+\mathbf{a}=-\mathbf{b}$），可得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}$。因此

$$AB^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2-2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3,$$

同理 $BC^2 = CA^2 = 3$。三條邊的長度都是 $\sqrt{3}$，所以**三角形 ABC 是等邊三角形（equilateral triangle）**。（每對位置向量（position vector）之間的夾角都是 120°，而由於 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{0}$，$O$ 既是三角形的外心（circumcentre），也是它的形心（centroid）。）

第 (ii) 部分

把條件寫成 $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=-(\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)$，兩邊取長度的平方：

$$2+2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=2+2\,\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4.$$

以另外兩種可能的方式把向量分組，同樣可得

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_4=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3.$$

由於 $A_iA_j^2=2-2\,\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$，這表示對棱相等：$A_1A_2=A_3A_4$、$A_1A_3=A_2A_4$ 及 $A_1A_4=A_2A_3$。

(a) 四點共面

想一想 四點所在的平面是否一定經過原點？

是的。四點的形心是 $\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)=\mathbf{0}$，而平面上各點的形心必定在該平面上。所以該平面包含 O；又由於每個 A_i 與 O 的距離都是 1，四點都在該平面上以 O 為圓心、半徑為 1 的圓上。以下我們都在這個平面上討論。

設 $\mathbf{w}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，於是 $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}$。

若 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{a}_2=-\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_4=-\mathbf{a}_3$。

若 $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$，把 $\mathbf{a}_3$ 與 $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}$ 取點積，並利用 (ii) 的結果：

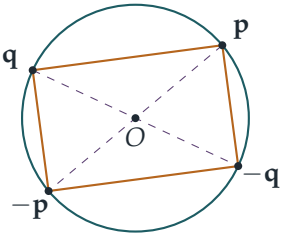
$$\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{w}=-(1+\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4)=-(1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)=-\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2.$$

所以 $\mathbf{a}_3$ 是一個沿 $\mathbf{w}$ 方向分量固定的單位向量：它的端點落在一條垂直於 $\mathbf{w}$ 的固定直線上，而一條直線與一個圓最多相交於兩點。現在 $-\mathbf{a}_1$ 和 $-\mathbf{a}_2$ 正是兩個這樣的向量，因為

$$(-\mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{w}=-(1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)=-\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2,$$

$-\mathbf{a}_2$ 亦同理；又因 $A_1\neq A_2$，兩者並不相同。因此 $\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_1$ 或 $\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_2$，而 $\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}-\mathbf{a}_3$ 就是另一個。

在所有情況下，四個位置向量都是 $\mathbf{p},-\mathbf{p},\mathbf{q},-\mathbf{q}$，其中 $\mathbf{q}\neq\pm\mathbf{p}$ 為某兩個單位向量。所以四點是圓上兩條直徑（diameter）的端點。它們組成的四邊形的對角線（diagonal）互相平分（於 O），所以它是平行四邊形（parallelogram）；而且對角線相等（長度都是 2），所以它是**長方形（rectangle）**。當且僅當兩條直徑互相垂直時，它是正方形。



（嚴格來說，頂點應按圓周上的次序排列。若標記剛好是 $A_1 = \mathbf{p}$、$A_2 = \mathbf{q}$、$A_3 = -\mathbf{q}$、$A_4 = -\mathbf{p}$，按此次序連接各點，畫出的會是這個長方形的兩條邊和兩條對角線。）

(b) 正四面體 現在全部六條棱 A_iA_j 都相等，所以全部六個標量積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$（$i \neq j$）取同一個值，設為 k。把 $\mathbf{a}_1$ 與零和取點積：

$$0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = 1 + 3k,$$

所以 $k = -\frac{1}{3}$。於是每條棱都有

$$A_1A_2^2 = 2 - 2k = 2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}, \qquad \text{所以邊長為} \qquad \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

驗算

- 以 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$ 為頂點的四面體是正四面體（regular tetrahedron），其位置向量都是單位向量且總和為 $\mathbf{0}$，棱長為 $\frac{1}{\sqrt{3}}|(0,2,2)| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$。
- 與 (i) 比較：三個夾角為 120° 的單位向量給出邊長 $\sqrt{3} \approx 1.732$，稍長一點。這是合理的，因為正四面體的頂點在球面上「更擠迫」。
- 用電腦對數千組隨機的、總和為零的四個單位向量進行驗算，證實了 (ii) 中三條標量積等式全部成立，而且在共面的情況下，各點總是以相反的成對形式 $\pm\mathbf{p}$、$\pm\mathbf{q}$ 出現。

常見錯誤

- 在 (i) 中，得出 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ 便停下來：必須求出全部三個標量積（或全部三條邊長），才可斷定三角形是等邊三角形。
- 在 (a) 中，只憑對邊相等便斷定是「平行四邊形」，而沒有檢查頂點的排列方式；或忘記證明該平面經過 O。

STEP 之外

一組總和為零、且兩兩標量積都相等的單位向量，正是正單形（*regular simplex*）的頂點：在 n 維空間中共有 $n+1$ 個這樣的向量，且 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = -\frac{1}{n}$，這就給出了上面的 $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{3}$。這類構型見於化學（甲烷的鍵角 109.5° 就是 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$）以及編碼理論（coding theory）。由所有標量積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ 組成的矩陣稱為 *Gram* 矩陣（*Gram matrix*），它在不計旋轉的意義下決定了一組向量的構型，而這正是整道題背後的想法。想深入了解，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。