詳細解答

STEP II 2019，第 6 題

純數學 • 一階微分方程

STEP II 2019，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

兩條方程的右方都只透過一個組合依賴 x 和 y：第 (i) 部分是 $y+x$，第 (ii) 部分是 $y-x$，因為那個二次式其實就是 $(y-x)^2+4(y-x)+3$。單憑這一個觀察，就能找出直線解，把駐點（stationary point）限制在某些直線上，並且（在第 (i) 部分）把方程化成可以分離變數（separation of variables）的形式。之後，題目中關於解曲線（solution curve）永不相交的提示就能完成餘下的工作：一條從兩條直線解之間出發的曲線，會永遠被困在兩者之間。

解答

第 (i) 部分

直線解。若 $y=mx+c$，則 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$，所以我們需要

$$m=mx+c+x+1=(m+1)x+(c+1)\quad \text{對所有} x.$$

比較 x 的係數得 $m=-1$，再比較常數項得 $c+1=m=-1$，所以 $c=-2$。這個解是 $y=-x-2$。

駐點在哪裏。在 $y=y_3(x)$ 的駐點上，我們有 $0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x+1$，所以該點位於直線 $y=-x-1$ 上。

現在假設 $k<-2$。曲線 $y=y_3(x)$ 和直線 $y=-x-2$ 都是解，而在 $x=0$ 時曲線位於直線下方（$k<-2$）。兩者永不相遇，所以對每個 x，曲線都留在直線下方：$y_3(x)<-x-2<-x-1$。因此 $y_3(x)+x+1<-1<0$ 處處成立。斜率永不為零（事實上總是小於 -1），所以沒有駐點。

每個駐點都是極小點。把方程求導，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1.$$

在駐點上一階導數（derivative）為 0，所以二階導數是 $1 > 0$，該點是局部極小點（local minimum）。

求解。設 $Y = y + x$，則 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = Y + 2$。在直線 $Y = -2$ 上，這就是我們已有的解；否則便分離變數：

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y+2} = \int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|Y+2| = x + \text{常數} \quad \Longrightarrow \quad Y + 2 = Ae^x,$$

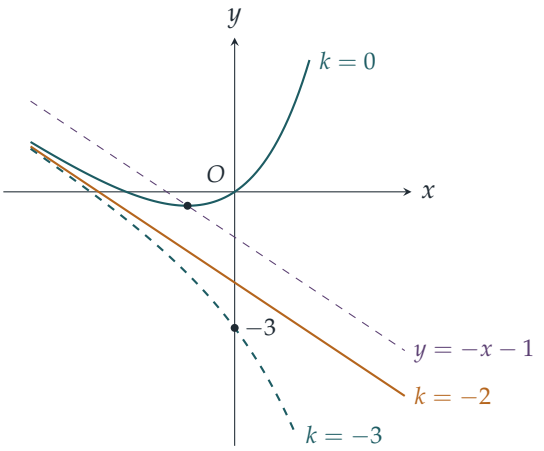
其中 A 是常數（而 $A = 0$ 對應那條直線）。所以 $y = Ae^x - x - 2$，由 $y(0) = k$ 得 $A = k + 2$：

$$y_3(x) = (k+2)e^x - x - 2.$$

這與我們之前的發現一致：$y_3'(x) = (k+2)e^x - 1$，當 $k \le -2$ 時永不為零；當 $k > -2$ 時，它在 $e^x = 1/(k+2)$ 處為零，且只有一次。

三條曲線。

- $k = 0$：$y = 2e^x - x - 2$，經過原點。極小點在 $e^x = \frac{1}{2}$ 處，即 $(-\ln 2,\ \ln 2 - 1) \approx (-0.69, -0.31)$，位於直線 $y = -x - 1$ 上。當 $x \to -\infty$ 時，$2e^x \to 0$，曲線從上方趨近 $y = -x - 2$；當 $x \to \infty$ 時，指數項佔主導。
- $k = -2$：就是直線 $y = -x - 2$ 本身。
- $k = -3$：$y = -e^x - x - 2$，經過 $(0, -3)$，一直遞減。當 $x \to -\infty$ 時，它從下方趨近 $y = -x - 2$；當 $x \to \infty$ 時，它像 $-e^x$ 一樣急降。



第 (ii) 部分

改寫右方。把各項歸組，

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+3=(y-x)^2+4(y-x)+3=(y-x+1)(y-x+3).$$

不妨設 $u=y-x$，於是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)$。

直線解。若 $y=mx+c$，則 $u=(m-1)x+c$，我們需要

$$m=\big((m-1)x+c+1\big)\big((m-1)x+c+3\big)\quad\text{對所有}x.$$

若 $m\neq 1$，右方是一個真正的 x 的二次式，不可能等於常數，所以 $m=1$。於是 $1=(c+1)(c+3)$，即 $c^2+4c+2=0$，得 $c=-2\pm\sqrt{2}$。兩個解是

$$y=x-2+\sqrt{2}\qquad\text{及}\qquad y=x-2-\sqrt{2}.$$

y_4 的駐點。斜率恰好在 $u=-1$ 或 $u=-3$ 時為零，所以任何駐點都位於

$$y=x-1\qquad\text{或}\qquad y=x-3.$$

在這兩條直線之間，我們有 $-3<y-x<-1$，所以 $u+1<0<u+3$，斜率 $(u+1)(u+3)$ 是負的。（在兩線之外，斜率是正的。）

曲線落在哪裏。在 $x=0$ 時，$u=-2$，介乎 $-2-\sqrt{2}\approx-3.41$ 與 $-2+\sqrt{2}\approx-0.59$ 之間。所以在 $x=0$ 時，曲線位於兩條直線解之間；又因為解曲線永不相交，

$$x-2-\sqrt{2}<y_4(x)<x-2+\sqrt{2}\quad\text{對所有}x.$$

由兩條駐點直線所夾的帶狀區域（$-3<u<-1$）位於這條帶狀區域之內。

想一想 曲線被困在兩條平行線之間，但它在帶狀區域內會走向哪裏？

追蹤 $u=y_4-x$。它滿足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)-1=u^2+4u+2=\big(u+2-\sqrt{2}\big)\big(u+2+\sqrt{2}\big),$$

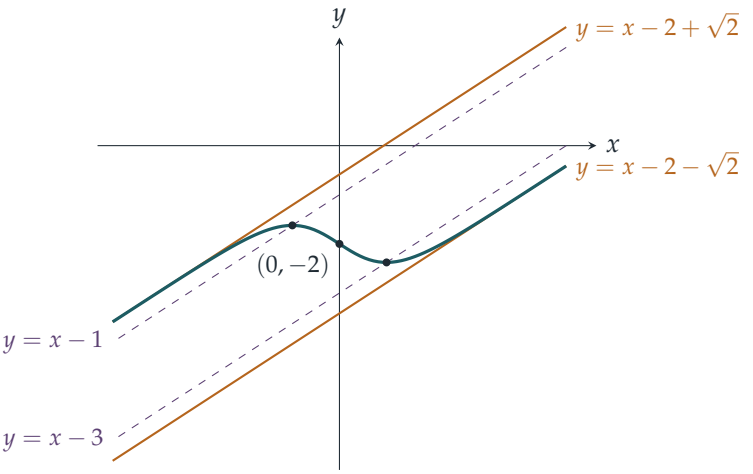
只要 $-2-\sqrt{2}<u<-2+\sqrt{2}$，這就是負數，而這一直成立。所以 u 嚴格遞減且有界，因此當 $x\to\pm\infty$ 時有極限。在這樣的極限處，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 必須趨於 0（否則 u 會無界地改變），所以極限就是那兩個根：當 $x\to-\infty$ 時 $u\to-2+\sqrt{2}$，當 $x\to+\infty$ 時 $u\to-2-\sqrt{2}$。

所以，由左至右看：

- 在最左方，曲線從下方緊貼 $y=x-2+\sqrt{2}$，斜率接近 1；
- 當 u 下降穿過 -1 時，曲線與 $y=x-1$ 相交於唯一一點，這是一個局部極大點（斜率由正轉負）；

- 它以斜率 $(-1)(1) = -1$ 向下穿過 $(0, -2)$；
- 當 u 下降穿過 -3 時，曲線與 $y = x - 3$ 相交於唯一一點，這是一個局部極小點；
- 之後它再次上升，從上方緊貼 $y = x - 2 - \sqrt{2}$，斜率趨於 1。

由於 u 嚴格遞減，$u = -1$ 和 $u = -3$ 各自恰好只經過一次，所以恰好有兩個駐點。還有一個漂亮的特點：把 (x, y) 換成 $(-x, -4 - y)$，方程和起點 $(0, -2)$ 都保持不變，所以曲線關於 $(0, -2)$ 有半周旋轉對稱（half-turn symmetry），而極大點和極小點互為關於該點的鏡像。



驗算

- 在第 (i) 部分代回原式：$y = (k+2)e^x - x - 2$ 給出 $y' = (k+2)e^x - 1$，而 $y + x + 1 = (k+2)e^x - 1$。設 $k = -2$ 便得回那條直線。
- 當 $k = 0$ 時，極小點 $(-\ln 2, \ln 2 - 1) \approx (-0.693, -0.307)$ 確實位於 $y = -x - 1$ 上。
- 在第 (ii) 部分，從 $(0, -2)$ 出發的逐步數值解（經電腦核實）一直留在兩條直線之間，在 $y = x - 1$ 上約 $(-0.623, -1.623)$ 處達到極大，在 $y = x - 3$ 上約 $(0.623, -2.377)$ 處達到極小，到了 $x = \pm 6$ 時與漸近線（asymptote）的距離約在 10^{-7} 之內。這兩點互為關於 $(0, -2)$ 的像，正如對稱性所預測。

常見錯誤

- 忘記運用不相交的性質：「$k < -2$ 意味着沒有駐點」需要曲線對*所有* x 都留在 $y = -x - 2$ 下方，而不只是在 $x = 0$ 時。

- 畫 y_4 時讓它穿過其中一條直線解，或把極大點和極小點的位置弄反。$(u+1)(u+3)$ 在兩條虛線之間的正負號可以判定哪個是哪個。
- 在第 (ii) 部分求 m 和 c 時，未先排除（或確認）$m=1$ 便除以 $m-1$。

STEP 之外

題目開頭的提示，就是皮卡－林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem）中關於唯一性（uniqueness）的那一半：對於光滑的右方，每一點恰好有一個解經過，所以解曲線不能相交。第 (ii) 部分其實是一條喬裝的*自治*（autonomous）方程 $u'=u^2+4u+2$；我們不用任何公式，只憑平衡點（equilibrium）以及 u' 在平衡點之間的正負號，就找出曲線的走向，這正是微分方程定性理論（qualitative theory of differential equations）的起點。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）既涵蓋唯一性，也涵蓋這種相線（phase line）圖像。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。