詳細解答

STEP II 2019，第 5 題

純數學 • 迭代的不動點

> **STEP II 2019，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

常數數列（constant sequence）的首項是一個不動點（fixed point），即 $\mathrm{f}(x) = x$ 的解。週期（period）為 2 的數列，其首項是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 的一個解，而且不是不動點。每個不動點同時也是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 的解，所以 $\mathrm{f}(x) - x$ 必定是四次多項式（quartic）$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$ 的因式（factor）。只要求出另一個因式（它是一個二次式（quadratic）），一切便歸結為判別式（discriminant）的問題。

解答

兩部分通用的因式分解

在兩部分中，$\mathrm{f}(x) = x^2 - px + c$，其中 c 為常數（在 (i) 中 $c = p$，在 (ii) 中 $c = q$）。對任意 x 和 y，

$$\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(x) = (y^2 - x^2) - p(y - x) = (y - x)(y + x - p).$$

令 $y = \mathrm{f}(x)$，再在兩邊加上 $\mathrm{f}(x) - x$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x &= [\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - \mathrm{f}(x)] + [\mathrm{f}(x) - x] \\ &= (\mathrm{f}(x) - x)(\mathrm{f}(x) + x - p + 1).\end{aligned}$$

我們會用到以下兩個推論：

- 數列的週期為 2，當且僅當 a 是 $Q(x) = \mathrm{f}(x) + x - p + 1$ 的根，而不是 $\mathrm{f}(x) - x$ 的根。事實上，若 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$，則 $u_2 = u_0$；由於每一項都由前一項決定，以歸納法（induction）可知對所有 n 都有 $u_{n+2} = u_n$。此時數列不是常數數列，當且僅當 $u_1 \neq u_0$，即 $\mathrm{f}(a) \neq a$。

- 若 x 是不動點，則 $Q(x) = 2x - p + 1$。因此不動點要同時是 Q 的根，只可能是 $x = \frac{1}{2}(p-1)$。

第 (i) 部分

這裏 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + p$，所以

$$\mathrm{f}(a) - a = a^2 - (p+1)a + p = (a-1)(a-p).$$

數列是常數數列，當且僅當 $u_1 = u_0$（此時每一項都等於 a），所以所求的值為

$$a = 1 \quad \text{及} \quad a = p.$$

至於週期 2，另一個因式是

$$Q(x) = x^2 - px + p + x - p + 1 = x^2 + (1-p)x + 1,$$

其判別式為

$$(1-p)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1).$$

- 若 $-1 < p < 3$，判別式為負，Q 沒有實根，因此沒有實數 a 能給出週期 2。
- 若 $p = 3$ 或 $p = -1$，Q 只有一個根 $x = \frac{1}{2}(p-1)$，分別為 1 或 -1。當 $p = 3$ 時，不動點是 1 和 3；當 $p = -1$ 時，不動點是 1 和 -1。兩種情況下 Q 的根都是不動點，所以由此出發的數列是常數數列，而不是週期 2。
- 若 $p > 3$ 或 $p < -1$，Q 有兩個相異實根。兩者都不是不動點：根據上面第二點，若是不動點則必須等於 $\frac{1}{2}(p-1)$，但

  $$Q\left(\tfrac{1}{2}(p-1)\right) = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 - \tfrac{1}{2}(p-1)^2 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \neq 0$$

  因為 $(p-1)^2 > 4$。所以取 a 為任一個根，都得到週期為 2 的數列。

因此，存在能給出週期 2 的 a 值，當且僅當 $p > 3$ 或 $p < -1$。

第 (ii) 部分

現在 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + q$，所以

$$\mathrm{f}(x) - x = x^2 - (p+1)x + q.$$

常數數列需要某個 a 使 $\mathrm{f}(a) = a$，即這個二次式的一個實根。

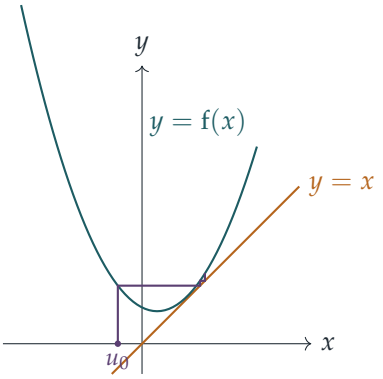
若對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，則對每個 a 都有 $\mathrm{f}(a) \neq a$，所以沒有數列是常數數列。

反過來，假設沒有 a 給出常數數列，即 $g(x) = x^2 - (p+1)x + q$ 沒有實根。那麼 g 是連續（continuous）的而且永不為零，所以它不會變號；又因為當 $x \to \infty$ 時 $g(x) \to +\infty$，它處處為正。（等價地說：判別式為負，而首項係數（leading coefficient）為正。）也就是說，對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，這便完成了「當且僅當」的證明。

推論。假設不存在常數數列。那麼對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，所以對任何 a，

$$u_{n+1} = \mathrm{f}(u_n) > u_n \quad \text{對所有} n.$$

數列嚴格遞增（strictly increasing），所以 $u_2 > u_1 > u_0$。特別地，$u_2 \neq u_0$，數列不可能有週期 2。



上圖展示了這個情況：拋物線（parabola）完全位於 $y = x$ 之上，所以迭代（iterate）形成的「階梯」只能不斷向上攀升。

最後一部分。逆命題（converse）是錯誤的。取 $p = q = 0$，即 $\mathrm{f}(x) = x^2$。當 $a = 0$ 和 $a = 1$ 時，數列是常數數列。至於週期 2，我們需要 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a^4 = a$，即 $a(a-1)(a^2 + a + 1) = 0$。因式 $a^2 + a + 1$ 的判別式為負，所以唯一的實數解是 $a = 0$ 和 $a = 1$，兩者都是不動點。因此，雖然有些 a 值給出常數數列，卻沒有任何 a 值給出週期 2。

想一想 $\mathrm{f}(x) = x^2$ 只是碰巧成立嗎？

不是。一般而言，不動點的二次方程的判別式為 $D = (p+1)^2 - 4q$，而 $Q(x) = x^2 + (1-p)x + q - p + 1$ 的判別式是

$$(1-p)^2 - 4(q-p+1) = (p+1)^2 - 4q - 4 = D - 4.$$

與 (i) 一樣，Q 的根只有在 Q 的判別式為零時才會是不動點。所以當 $D \geq 0$ 時存在常數數列，當 $D > 4$ 時存在週期 2 的數列。任何滿足 $0 \leq D \leq 4$ 的 p、q 都給出一個反例（counterexample）。

驗算

- 在 (i) 中取 $p = 4$，$Q(x) = x^2 - 3x + 1$ 的根為 $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \approx 2.618,\ 0.382$。從 2.618 出發，$f(2.618) = 4 + (2.618 - 4)(2.618) \approx 0.382$，而 $f(0.382) \approx 2.618$：週期為 2，與預測一致。
- 當 $p = 3$ 時，Q 的根是 $x = 1$，而 $f(1) = 3 + (1 - 3) = 1$：這是不動點，證實邊界值須被排除。
- 展開 $(x^2 - (p+1)x + p)(x^2 + (1-p)x + 1)$ 得 $f(f(x)) - x$；以電腦在數千組隨機的 (p, x) 上檢驗，連同 (ii) 中「週期 2 當且僅當 $D > 4$」這個條件，均沒有發現例外。

常見錯誤

- 把 $p = 3$ 和 $p = -1$ 也包括在內：此時 $f(f(a)) = a$ 有重根，但它是不動點，所以數列是常數數列。
- 忘記在尋找週期 2 的點之前，必須先從 $f(f(x)) - x$ 中除去因式 $f(x) - x$。
- 在最後一部分只憑不等式的方向來論證；要回答「是否成立... ?」這類問題，一個明確的反例才是決定性的。

STEP 之外

這是踏入*離散動力系統*（discrete dynamical systems）的第一步。每一個二次映射，經過線性變量代換後，都等價於邏輯斯諦映射（logistic map）$x \mapsto rx(1-x)$。隨着參數增大，不動點讓位給 2-循環，然後是 4-循環，如此類推，形成一連串倍週期分岔（period-doubling cascade），最終進入混沌（chaos）。你所找到的臨界值，即 Q 的判別式為零之處，正是這些分岔（bifurcation）中的第一個。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非線性動力學與混沌》）是一本非常易讀的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。