詳細解答

STEP II 2019，第 4 題

純數學 • 三角函數裂項相消乘積

> **STEP II 2019，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

若一串餘弦的乘積中，角度每次加倍（或減半），只要乘以最小角的正弦，乘積便會伸縮相消（telescopes）：二倍角公式（double-angle formula）$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 會把因子逐一「吞掉」。乘積一旦化為閉合形式（closed form），取對數（logarithm）便把它變成和，再求導便把 $\ln\cos$ 變成 $\tan$：正切之和正是由此而來。無窮的版本則可令 $n \to \infty$，並利用兩個標準極限得出。

解答

第 (i) 部分

把該乘積記為 P。由於 $\sin\frac{\pi}{9} \neq 0$，我們可以乘以它，並把恆等式使用三次：

$$8\sin\tfrac{\pi}{9}\,P = 4(2\sin\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9})\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = 2(2\sin\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9})\cos\tfrac{4\pi}{9}$$
$$= 2\sin\tfrac{4\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \sin\tfrac{8\pi}{9} = \sin(\pi - \tfrac{\pi}{9}) = \sin\tfrac{\pi}{9}.$$

兩邊除以 $8\sin\frac{\pi}{9}$，得

$$\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

第 (ii) 部分

這裏的角 $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$ 逐次減半，所以最小的是 $x/2^n$。由於 $0 < x/2^n < \frac{1}{2}\pi$，它的正弦不為零。乘以 $\sin(x/2^n)$ 後，因子 $\cos(x/2^n)$ 與它配對，得出 $\frac{1}{2}\sin(x/2^{n-1})$；這又與

$\cos(x/2^{n-1})$ 配對，如此類推，直至 $\cos x$。這 $n+1$ 步每一步都貢獻一個因子 $\frac{1}{2}$：

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x, \qquad \text{所以} \qquad \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)}.$$

想一想 求導怎樣能把餘弦的乘積變成正切的和？

取對數。每個因子都是正數，因為對每個 k 都有 $0<x/2^k<\frac{1}{2}\pi$，而且 $\sin 2x>0$。因此

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\ln\sin 2x-(n+1)\ln 2-\ln\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

對 x 求導，並由連鎖法則（chain rule）得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\cos(x/2^k)=-\frac{1}{2^k}\tan(x/2^k)$：

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=2\cot 2x-\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

乘以 -1，正好得出所求結果：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-2\cot 2x.$$

第 (iii) 部分

把乘積公式除以 $\cos x\neq 0$，並利用 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，得

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)\cos x}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

想一想 當 $n\to\infty$ 時，$2^n\sin(x/2^n)$ 會怎樣？

設 $\theta=x/2^n$，於是當 $n\to\infty$ 時 $\theta\to 0$。那麼

$$2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\ \longrightarrow\ x\cdot 1=x,$$

因此

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}.$$

至於級數（series），代入 $j=k+2$：那麼 $\frac{1}{2^{j-2}}=\frac{1}{2^k}$ 且 $\frac{\pi}{2^j}=\frac{\pi/4}{2^k}$，所以這個和就是第 (ii) 部分的級數取 $x=\frac{\pi}{4}$ 的情形，而此值位於 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 內。取這個 x 時，$2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$，所以直至 $k=n$ 的部分和（partial sum）為

$$\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\pi}{4\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\qquad\left(\theta=\frac{x}{2^n},\ x=\frac{\pi}{4}\right).$$

當 $n\to\infty$ 時，$\theta\to 0$ 且 $\theta/\tan\theta\to 1$，所以部分和趨於 $1/x$：

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{2^{j-2}}\tan\left(\frac{\pi}{2^j}\right)=\frac{4}{\pi}.$$

驗算

- 第 (i) 部分：$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \approx 0.9397 \times 0.7660 \times 0.1736 \approx 0.1250$。
- 第 (ii) 部分取 $n = 0$：乘積就是 $\cos x$，而公式給出 $\sin 2x/(2\sin x) = \cos x$。取 $n = 0$ 時，和的恆等式變成 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$，這正是 cot 的二倍角公式移項後的形式。
- 第 (iii) 部分：級數的首幾項為 $\tan \frac{\pi}{4} = 1$、$\frac{1}{2}\tan \frac{\pi}{8} \approx 0.2071$、$\frac{1}{4}\tan \frac{\pi}{16} \approx 0.0497$、...；經電腦驗證，總和為 $1.27324\ldots = 4/\pi$。
- 在 $\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ 中令 $x \to 0$，得 $1 = 1$，理應如此。

常見錯誤

- 數錯 $\frac{1}{2}$ 因子的個數：由 $k = 0$ 到 n 的乘積有 $n + 1$ 個因子，所以分母是 2^{n+1}，而不是 2^n。
- 取對數時沒有指出每個因子都是正數；這正是範圍 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 重要的原因。
- 忘記 $2\cot 2x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 時為零，或者錯用 $x = \frac{\pi}{2}$（這樣 $j = 1$ 的項便是 $\tan \frac{\pi}{2}$，而它沒有定義）。

STEP 之外

在 $\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ 中設 $x = \frac{\pi}{2}$，並把每個餘弦寫成嵌套平方根，便得到韋達（Viète）公式 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdots$，這是數學史上第一個無窮乘積（infinite product）。像我們對有限乘積那樣，對無窮乘積的對數逐項求導，是需要理據支持的；分析（analysis）的入門課程會講清楚何時可以這樣做。歐拉（Euler）乘積 $\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 也是從同樣的思路發展而來。如想了解嚴謹的理論背景，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。