詳細解答

STEP II 2019，第 3 題

純數學 • 多項式根的界限

> **STEP II 2019，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

三角不等式（triangle inequality）讓我們把多項式（polynomial）的每一項換成它的大小，從而估計整個多項式的上界；而當 $|x| < 1$ 時，這些大小構成一個等比級數（geometric series）。這就給出細小的根（root）的一個下界（lower bound）。至於較大的根，竅門是考慮 $1/\omega$：把 f 的係數（coefficient）倒轉排列，得到的多項式形式完全相同，於是關於細小根的結果可以再派上用場一次。在第 (ii) 部分，這些界把尋找整數根的範圍縮小至只剩四個候選值。

解答

三角不等式

兩邊均為非負，因此只需比較它們的平方。由於 $x_1x_2 \leq |x_1x_2| = |x_1||x_2|$，

$$|x_1 + x_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 = (|x_1| + |x_2|)^2,$$

取非負平方根即得 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$。

對於 n 個數，我們對 n 用歸納法（induction）。$n = 1$ 的情況是等式，而 $n = 2$ 已經證明。若結果對 $n - 1$ 個數成立，則對 $x_1 + \cdots + x_{n-1}$ 和 x_n 應用兩個數的情況，得

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n| &\leq |x_1 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n| \\ &\leq |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|, \end{aligned}$$

這正是 n 個數的結果。

第 (i)(a) 部分

我們有 $\mathrm{f}(x)-1 = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$。先用三角不等式，再用 $|a_i| \le A$，最後對末項用 $1 \le A$，得

$$\begin{aligned}|\mathrm{f}(x)-1| &\le |a_1||x| + \cdots + |a_{n-1}||x|^{n-1} + |x|^n \\ &\le A(|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n).\end{aligned}$$

因為 $0 \le |x| < 1$，而無窮級數的所有項均為非負，所以有限的等比和不超過無窮的等比和：

$$|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n \le \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}.$$

因此 $|\mathrm{f}(x)-1| \le \dfrac{A|x|}{1-|x|}$，得證。

第 (i)(b) 部分

由於 $\mathrm{f}(\omega) = 0$，我們有 $|\mathrm{f}(\omega)-1| = 1$，故由 (a) 部分得

$$1 \le \frac{A|\omega|}{1-|\omega|}.$$

因為 $1-|\omega| > 0$，兩邊同乘時不等號方向不變：$1-|\omega| \le A|\omega|$，即 $1 \le (1+A)|\omega|$，所以

$$|\omega| \ge \frac{1}{1+A}.$$

上界則是顯然的：$|\omega| < 1 \le 1+A$。因此 $(*)$ 成立。

第 (i)(c) 部分

現在 $|\omega| \ge 1$。下界很容易：由於 $A \ge 1 > 0$，有 $|\omega| \ge 1 > \frac{1}{1+A}$。真正需要證明的是上界。

若 $|\omega| = 1$，則立即有 $|\omega| \le 1+A$，因此設 $|\omega| > 1$。令 $\mathrm{g}(y) = y^n\,\mathrm{f}(1/y)$，即

$$\mathrm{g}(y) = 1 + a_{n-1}y + a_{n-2}y^2 + \cdots + a_1y^{n-1} + y^n.$$

想一想 為甚麼 g 可以使用 (a) 和 (b) 部分的結果？

它的形式與 f 完全相同：常數項（constant term）為 1，首項係數（leading coefficient）為 1，其餘係數是倒序排列的 $a_{n-1}, \ldots, a_1$，每個的大小仍然不超過 A。因此 (b) 部分可以用同一個 A 應用於 g。

由於 $\omega \neq 0$，$g(1/\omega) = \omega^{-n} f(\omega) = 0$，所以 $1/\omega$ 是 g 的一個實根，且 $|1/\omega| < 1$。對 g 應用 (b) 部分，得

$$\frac{1}{|\omega|} \geq \frac{1}{1+A}, \qquad \text{所以} \qquad |\omega| \leq 1 + A.$$

因此，無論大小如何，f 的每個實根都滿足 $(*)$。（注意 0 永遠不是根，因為 $f(0) = 1$。）

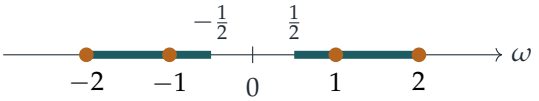
第 (ii) 部分

除以 135 並按升冪排列各項，方程即為 $f(x) = 0$，其中

$$f(x) = 1 - \tfrac{126}{135}x - \tfrac{91}{135}x^2 - \tfrac{100}{135}x^3 - x^4 + x^5.$$

這具有第 (i) 部分的形式，其中 $n = 5$：常數項和首項係數都是 1，其餘係數的大小為 $\frac{126}{135}, \frac{91}{135}, \frac{100}{135}, 1$，全部不超過 $A = 1$。所以每個實根都滿足

$$\tfrac{1}{2} \leq |\omega| \leq 2.$$



容許範圍（塗色部分）內的整數只有 ± 1 和 ± 2。代入原來的五次多項式（quintic）$p(x) = 135x^5 - 135x^4 - 100x^3 - 91x^2 - 126x + 135$：

$$\begin{aligned} p(1) &= 135 - 135 - 100 - 91 - 126 + 135 = -182, \\ p(-1) &= -135 - 135 + 100 - 91 + 126 + 135 = 0, \\ p(2) &= 4320 - 2160 - 800 - 364 - 252 + 135 = 879, \\ p(-2) &= -4320 - 2160 + 800 - 364 + 252 + 135 = -5657. \end{aligned}$$

所以唯一的整數根是 $x = -1$。事實上

$$p(x) = (x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135),$$

而四次因式（quartic factor）在 $x = -1$ 時的值為 971，所以 -1 是單根（simple root）。

驗算

- 展開 $(x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135)$，應得回原來的五次多項式。
- 這個五次多項式還有另外兩個實根，約為 0.595 和 1.725；兩者都在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 之內，與第 (i) 部分的預測一致。
- 試取 $f(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$，其中 $A = 2$：根 1 落在 $[\frac{1}{3}, 3]$ 之內。這些界亦已用電腦在數百個隨機多項式上驗證過。

常見錯誤

- 在 (a) 部分忘記 x^n 項：它的係數是 1，而不是某個 a_n；正是 $A \geq 1$ 才讓它可以併入等比級數。
- 在 (c) 部分，當 $|\omega| \geq 1$ 時試圖直接在 ω 處再用 (a) 部分：此時等比級數不再收斂（converge）。應改為考慮 $1/\omega$。
- 在第 (ii) 部分把 135 的所有因數（divisors）逐一當作候選根測試：這樣做是正確的，但第 (i) 部分的界只留下四個需要測試。

STEP 之外

以係數估計多項式的根的範圍是一個經典課題；這裏的結果是柯西（Cauchy）界（Cauchy's bound）的一個版本，而且同一論證對複根（complex roots）一字不改地成立，只需把絕對值（absolute value）換成模（modulus）。倒轉變換 $y^n \mathrm{f}(1/y)$ 把細小的根與較大的根互換，是代數和複分析（complex analysis）中的標準工具。若想了解這類界以及更多關於複根幾何的內容，可以閱讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。