詳細解答

# STEP II 2019，第 2 題

純數學 • 反函數的積分

**STEP II 2019，第 2 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

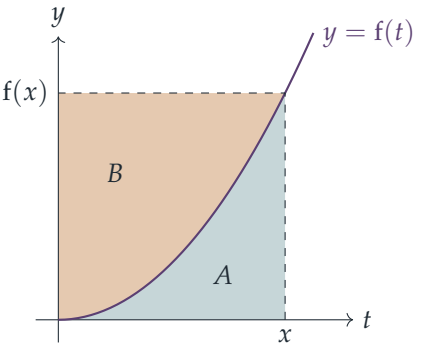
## 關鍵思路

$y = \mathrm{f}(t)$ 的圖像把以 $(0,0)$ 和 $(x,\mathrm{f}(x))$ 為頂點的長方形分成兩塊。其中一塊是曲線下方的面積，另一塊是曲線與 $y$ 軸之間的面積，而後者正是反函數（inverse function）的積分。因此兩個積分之和等於長方形的面積。第 (i) 及 (ii) 部分的函數都只是隱式地定義，我們無法直接把它們積分，但它們的反函數卻是簡單的三次函數。這條恆等式讓我們把一個困難的積分換成一個容易的積分。

## 解答

### 開首的結果

由於當 $t > 0$ 時 $\mathrm{f}'(t) > 0$，而且 $\mathrm{f}(0) = 0$，所以 f 在 $[0,x]$ 上嚴格遞增(strictly increasing)，因此當 $t > 0$ 時 $\mathrm{f}(t) > 0$，而 f 有一個由 $[0,\mathrm{f}(x)]$ 到 $[0,x]$ 的反函數 $\mathrm{f}^{-1}$。同一條曲線既可以用 $y = \mathrm{f}(t)$ 描述，也可以用 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$ 描述。



區域 $A$ 是在 $0 \le t \le x$ 範圍內曲線與 $t$ 軸之間的部分，其面積為

$$A = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

區域 $B$ 是在 $0 \le y \le \mathrm{f}(x)$ 範圍內曲線與 $y$ 軸之間的部分，由一條條水平窄條組成。位於高度 $y$ 的窄條由 $t = 0$ 延伸至 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$，因此

$$B = \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

由於曲線遞增，並由 $(0,0)$ 走到 $(x,\mathrm{f}(x))$，$A$ 與 $B$ 恰好拼合在一起，互不重疊，填滿長方形 $0 \le t \le x$，$0 \le y \le \mathrm{f}(x)$。該長方形的面積是 $x\,\mathrm{f}(x)$，因此

$$\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{f}(x),$$

即為所求。

### 第 (i) 部分

設 $\phi(y) = y^3 + y$。那麼 $\phi'(y) = 3y^2 + 1 > 0$，所以 $\phi$ 嚴格遞增，而且當 $y \to \pm\infty$ 時 $\phi(y) \to \pm\infty$。因此對每個實數 $t$，恰好有一個實數 $y$ 使 $\phi(y) = t$，這個 $y$ 就是 $\mathrm{g}(t)$。換句話說，$\mathrm{g} = \phi^{-1}$。

$\mathrm{g}(0) = 0$。代入 $t = 0$，得 $\mathrm{g}(0)(\mathrm{g}(0)^2 + 1) = 0$。由於 $\mathrm{g}(0)$ 是實數，$\mathrm{g}(0)^2 + 1 \ge 1$，故此 $\mathrm{g}(0) = 0$。

$\mathrm{g}'(t) > 0$。把 $\mathrm{g}(t)^3 + \mathrm{g}(t) = t$ 對 $t$ 作隱函數求導（implicit differentiation），

$$(3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1)\,\mathrm{g}'(t) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{g}'(t) = \frac{1}{3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1} > 0,$$

因為分母至少是 1。

> ? **想一想** 我們寫不出 $\mathrm{g}(t)$ 的表達式，那怎樣才能把它積分？

我們根本不需要寫出來。g 滿足開首結果的條件，而它的反函數是 $\phi(y) = y^3 + y$，很容易積分。以 $x = 2$ 應用該結果時需要知道 $\mathrm{g}(2)$，即 $y^3 + y = 2$ 的實根。這個根是 $y = 1$，而且由於 $\phi$ 嚴格遞增，它是唯一的實根。因此

$$\int_0^2 \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{g}(2) - \int_0^1 (y^3 + y)\,\mathrm{d}y = 2 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

### 第 (ii) 部分

比較兩個定義，$\mathrm{h}(t)$ 是 $y^3 + y = t + 2$ 的實數解，所以 $\mathrm{h}(t) = \mathrm{g}(t+2)$。代入 $u = t + 2$，

$$\int_0^8 \mathrm{h}(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^2 \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u.$$

對於第一個積分，我們以 $x = 10$ 應用開首的結果。由於 $2^3 + 2 = 10$，我們有 $\mathrm{g}(10) = 2$，因此

$$\int_0^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u = 10 \times 2 - \int_0^2 (y^3 + y)\,\mathrm{d}y = 20 - (4 + 2) = 14.$$

第二個積分則用第 (i) 部分的結果，

$$\int_0^8 \mathrm{h}(t)\,\mathrm{d}t = 14 - \frac{5}{4} = \frac{51}{4}.$$

*另一種方法*。我們也可以直接對 h 應用這幅圖。這次 $\mathrm{h}(0) = 1$，而不是 0。曲線由 $(0,1)$ 走到 $(8,2)$，而 $\mathrm{h}^{-1}(y) = y^3 + y - 2$。曲線下方的面積等於 $8 \times 2$ 的長方形，減去 $0 \times 1$ 的長方形（這裏是空的），再減去在 $1 \le y \le 2$ 範圍內曲線左方的面積：

$$16 - \int_1^2 (y^3 + y - 2)\,\mathrm{d}y = 16 - \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} - 2\right) = 16 - \tfrac{13}{4} = \tfrac{51}{4}.$$

## 驗算

- 在 $[0,2]$ 上 $0 \le \mathrm{g}(t) \le 1$，所以 (i) 的積分必定介乎 0 與 2 之間。此外，g 在該區間上是凹函數（concave）（它是一個遞增凸函數（convex function）的反函數），所以積分至少等於三角形面積 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$。答案 $\frac{5}{4}$ 符合這些要求。
- 在 (ii) 中，在 $[0,8]$ 上 $1 \le \mathrm{h}(t) \le 2$，所以積分介乎 8 與 16 之間，而 12.75 亦符合。
- 在多個點上以數值方法解這些三次方程，再用辛普森法則（Simpson's rule）積分，得到 1.25000 和 12.75000，與準確答案吻合。

## 常見錯誤

- 反函數積分的上限用錯：上限是 $\mathrm{g}(2) = 1$，而不是 2。
- 把開首的結果應用於 h 時，誤以為 $\mathrm{h}(0) = 0$。由於 $\mathrm{h}(0) = 1$，圖中多了一條窄條，恆等式需要作出調整（或者改用 $\mathrm{h}(t) = \mathrm{g}(t+2)$）。
- 忘記證明 g 的定義是良好的，即 $y^3 + y = t$ 恰好有一個實根。

## STEP 之外

開首的恆等式是*楊氏不等式*（Young's inequality）取等號的情況：對於滿足 $\mathrm{f}(0) = 0$ 的遞增函數 f 及任何 $a, b \ge 0$，都有 $ab \le \int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$。取 $\mathrm{f}(t) = t^{p-1}$ 便得到 $ab \le a^p/p + b^q/q$，這是分析學中赫爾德不等式（Hölder's inequality）的出發點。g 可導且

$g' = 1/\phi'(g)$ 這個事實，就是反函數定理（inverse function theorem）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有仔細的證明。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。