詳細解答

STEP II 2019，第 11 題

概率與統計 • 三角形的計數

> **STEP II 2019，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

三條長度能構成面積非零的三角形（triangle），當且僅當較短的兩條長度之和大於最長的一條。因此，整個問題歸結為在最大值固定的情況下數算數對的個數；最簡潔的數法，是固定中間的數 n_2，再問 n_1 可以取多少個值。第 (i) 部分負責計數；第 (ii) 和第 (iii) 部分只需除以相應的等可能（equally likely）選擇總數。

解答

第 (i) 部分

記 $m = n_3$。固定 $n_2 = k$，其中 $k \leq m-1$。那麼 n_1 必須滿足

$$m - k < n_1 < k,$$

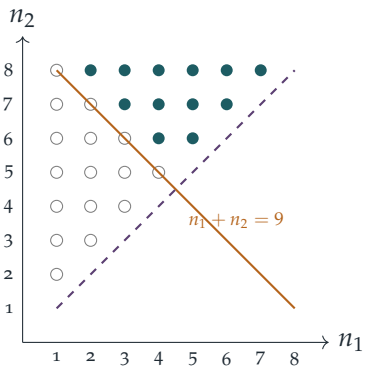
所以 n_1 取遍 $m-k+1, \ldots, k-1$，當 $2k-m-1$ 為正數時，共有 $2k-m-1$ 個選擇。（由於 $m-k \geq 1$，條件 $n_1 > 0$ 自動成立。）

當 $m = 9$ 時，個數為 $2k-10$，在 $k = 6,7,8$ 時為正數：

$$2 + 4 + 6 = 12.$$

當 $m = 10$ 時，個數為 $2k-11$，在 $k = 6,7,8,9$ 時為正數：

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$



上圖顯示 $n_3 = 9$ 的情況：實心點位於直線 $n_1 + n_2 = 9$ 上方，同時位於對角線 $n_1 = n_2$ 上方，共有 $2 + 4 + 6 = 12$ 個，每個 n_2 對應三角形區域中的一列。

奇數情況，$n_3 = 2n + 1$。當 $n_2 = k$ 時，個數為 $2k - 2n - 2 = 2(k - n - 1)$，在 $k = n + 2, \ldots, 2n$ 時為正數。設 $j = k - n - 1$，它由 1 取到 $n - 1$，

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = (n-1)n = n(n-1).$$

偶數情況，$n_3 = 2n$。當 $n_2 = k$ 時，個數為 $2k - 2n - 1$，在 $k = n + 1, \ldots, 2n - 1$ 時為正數。設 $j = k - n$，它由 1 取到 $n - 1$，

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2j-1) = (n-1)^2,$$

即首 $n - 1$ 個奇數之和。兩條公式都與 $12 = 4 \cdot 3$ 及 $16 = 4^2$ 吻合。

第 (ii) 部分

長度為 N 的棒是三條中最長的，所以這三條棒構成面積非零的三角形，當且僅當所選的兩條長度 $a < b$ 滿足 $a + b > N$。（其餘兩條三角不等式（triangle inequality），例如 $a + N > b$，由於 $N > b$ 而自動成立。）因此，有利的選擇正是第 (i) 部分中 $n_3 = N$ 時所數算的數對。

兩條棒是從餘下的 $N - 1$ 條中選出的，所以共有 $\binom{N-1}{2}$ 個等可能的選擇。

當 $N = 2n + 1$ 時：共有 $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ 個選擇，所以

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

此即所求。

當 $N = 2n$ 時：共有 $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1)$ 個選擇。要使它非零，我們需要 $n \geq 2$（當 $N = 2$ 時只剩一條棒，無法選出兩條）。於是

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

頗出人意料的是，儘管 N 小了一，答案卻與奇數情況的公式完全相同。

第 (iii) 部分

任意三條不同的棒都有一條最長的，設其長度為 m，其中 $3 \leq m \leq 2M+1$。這個選擇能構成三角形，當且僅當另外兩條長度構成第 (i) 部分中 $n_3 = m$ 時所數算的其中一個數對。每個有利選擇都只在其最長的棒之下被數算一次，所以有利選擇的個數為

$$T = \sum_{m=2}^{2M+1} c(m),$$

其中 $c(m)$ 是第 (i) 部分得出的個數。（由於 $c(2) = 0$，把 $m = 2$ 包括在內並無影響。）

> **想一想** $c(m)$ 對奇數和偶數 m 有不同的公式，那該怎樣把它們加起來呢？

把它們配對。對每個 $n = 1, \ldots, M$，把偶數值 $m = 2n$ 和奇數值 $m = 2n+1$ 放在一起；這樣恰好把 $m = 2, 3, \ldots, 2M+1$ 各涵蓋一次。每對的總貢獻為

$$(n-1)^2 + n(n-1) = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

利用題目給出的 $\sum k^2$ 公式及 $\sum k = \frac{1}{2}M(M+1)$，

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{M} \left(2n^2 - 3n + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{3}M(M+1)(2M+1) - \tfrac{3}{2}M(M+1) + M \\ &= \tfrac{1}{6}M\left[2(2M^2+3M+1) - 9(M+1) + 6\right] \\ &= \tfrac{1}{6}M\left(4M^2 - 3M - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{6}M(4M+1)(M-1). \end{aligned}$$

選出三條棒的等可能選擇總數為

$$\binom{2M+1}{3} = \frac{(2M+1)(2M)(2M-1)}{6}.$$

相除，並約去 $M/6$，

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{M(4M+1)(M-1)}{2M(2M+1)(2M-1)} = \frac{(4M+1)(M-1)}{2(2M+1)(2M-1)},$$

此即所求。

驗算

- $M = 1$：棒的長度為 $1, 2, 3$，而 $1 + 2 = 3$ 只得出退化三角形（degenerate triangle），所以概率應為 0，公式亦給出 0。
- $M = 2$：棒的長度為 1 至 5。能構成的三角形有 $\{2, 3, 4\}$、$\{2, 4, 5\}$ 和 $\{3, 4, 5\}$，所以概率為 $3/10$；公式給出 $\frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3}{10}$。
- 當 $M \to \infty$ 時，概率趨向 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$。這與連續版本吻合：若三條長度獨立地在 $[0, 1]$ 上均勻分佈，較短兩條之和大於最長一條的概率為 $\frac{1}{2}$。
- 第 (i) 部分的所有個數，以及第 (ii) 和第 (iii) 部分的所有概率，都已用電腦直接列舉每個數對或三元組加以核實，範圍為 n 至 39、M 至 19（例如 $M = 3$ 時得 $13/35$）。

常見錯誤

- 容許 $n_1 + n_2 = n_3$：長度為 $2, 3, 5$ 的三條棒只會平躺成一直線，面積為零，所以不等式必須是嚴格的。
- 在第 (ii) 部分用了 $\binom{N}{2}$ 而非 $\binom{N-1}{2}$：長度為 N 的棒已經被選走了。
- 在第 (iii) 部分只對 m 的奇數值（或只對偶數值）求和：最長的棒可以是由 3 至 $2M + 1$ 的任何長度。

STEP 之外

按最大元素把計數分拆，然後求和，是組合數學（combinatorics）中的標準技巧；同一思路對最大值的取值積分，便得出連續情況的答案 $\frac{1}{2}$。像上圖那樣數算某區域內的格點（lattice points），再與該區域的面積比較，正是連接離散概率與連續概率的橋樑。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）收錄了許多這類問題，包括經典的「斷棍」三角形問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。