詳細解答

STEP II 2019，第 10 題

力學 • 剛體平衡

STEP II 2019，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

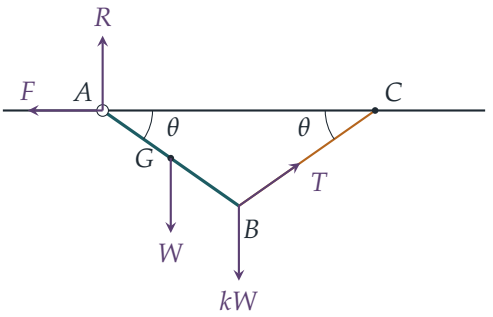
關鍵思路

由於 $AB = BC = 2a$，而且 A、C 都在軌道上，三角形 ABC 是等腰三角形（isosceles triangle），所以繩子與軌道所成的角也是 θ。掌握了這個幾何關係後，這就是一道標準的剛體（rigid body）平衡（equilibrium）問題：對 A 取力矩（moments），可以求出張力（tension）而不牽涉環上的未知力；然後再分解（resolving）各力，便得到法向反作用力（normal reaction）和摩擦力（friction）。最後一部分比較 k 的兩個臨界值：當 k 增大時，哪一個會先被達到？

解答

模型與受力。 桿是均勻的剛體，所以其重量 W 作用於中點 G，且 $AG = a$。環是輕的，所以軌道對環的力會直接傳到桿的 A 端：一個鉛垂向上的法向反作用力 R，以及一個沿軌道方向的摩擦力 F。繩子是輕而不可伸長的，張力 T 在 B 點沿 BC 方向作用。額外負載 kW 在 B 點鉛垂向下作用。

在三角形 ABC 中，AB 和 BC 兩邊都等於 $2a$，所以 A 和 C 處的底角相等：繩子與軌道所成的角是 θ。在水平方向上，B 與 A 相距 $2a\cos\theta$，C 與 A 相距 $4a\cos\theta$。



我們設 F 沿軌道指向遠離 C 的方向；稍後會看到它必然如此，因為繩子把桿拉向 C。

第 (i) 部分

對 A 取力矩，這樣便消去了 R 和 F。重量和負載的力臂分別是 $a\cos\theta$ 和 $2a\cos\theta$。至於張力，把它在 B 點分解為水平分量 $T\cos\theta$（指向 C）和鉛垂向上的分量 $T\sin\theta$。鉛垂分量的力臂是 $2a\cos\theta$，水平分量的力臂是 $2a\sin\theta$（即 B 在軌道下方的深度），而兩者都使桿向同一方向轉動，即圖中的逆時針方向。所以

$$T\sin\theta\cdot 2a\cos\theta + T\cos\theta\cdot 2a\sin\theta = W\cdot a\cos\theta + kW\cdot 2a\cos\theta,$$

$$4aT\sin\theta\cos\theta = aW(1+2k)\cos\theta.$$

由於當 $0<\theta<90^\circ$ 時 $\cos\theta\neq 0$，我們可以除以 $a\cos\theta$：

$$T=\frac{(2k+1)W}{4\sin\theta}.$$

只要環沒有滑動，不論環的情況如何，這個結果都成立。若 $T>W$，繩子便會斷裂，即 $(2k+1)W>4W\sin\theta$（兩邊乘以 $4\sin\theta>0$），亦即

$$2k+1>4\sin\theta,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

對整條桿分解各力。鉛垂方向：

$$R+T\sin\theta = W+kW \quad\Longrightarrow\quad R=(1+k)W-\frac{(2k+1)W}{4}=\frac{(2k+3)W}{4}.$$

水平方向上，只有 F 和張力的水平分量，所以

$$F=T\cos\theta=\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta}.$$

這是正數，證實了摩擦力的方向是遠離 C。另外留意 $R>0$，所以環確實是從上方壓在軌道上。

想一想 粗糙軌道上的環，究竟在甚麼時候會滑動？

摩擦力最多只能提供 μR。若平衡需要 $F > \mu R$，摩擦力便無法令環保持靜止，環就會滑動。所以環滑動的條件是

$$\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta} > \mu\,\frac{(2k+3)W}{4}.$$

兩邊乘以 $4\sin\theta/(W\cos\theta) > 0$，得

$$2k+1 > (2k+3)\mu\tan\theta,$$

此即所求。

第 (iii) 部分

記 $t = \tan\theta$ 及 $s = \sin\theta$。每個條件都表示 k 已超過某個臨界值。

繩子。由第 (i) 部分，當 $2k+1 > 4s$ 時繩子斷裂，即當

$$k > k_{\text{斷裂}} = \frac{4s-1}{2}.$$

環。把第 (ii) 部分的條件重新整理：

$$2k+1 > (2k+3)\mu t \iff 2k(1-\mu t) > 3\mu t - 1.$$

這裏用到 $\mu t < 1$：除以 $2(1-\mu t) > 0$ 不會改變不等式（inequality）的方向，所以當

$$k > k_{\text{滑動}} = \frac{3\mu t - 1}{2(1-\mu t)}.$$

時環便會滑動。（若沒有 $\mu t < 1$ 這個條件，環永遠不會滑動。若 $\mu t \geq 1$，則對所有 k 都有 $(2k+3)\mu t \geq 2k+3 > 2k+1$。這正是題目給出此條件的原因。）

當 k 從零開始增大時，較低的臨界值會先被越過。所以環在繩子斷裂之前滑動，當且僅當 $k_{\text{滑動}} < k_{\text{斷裂}}$。先乘以 $1-\mu t > 0$，

$$\begin{aligned}
\frac{3\mu t-1}{1-\mu t} < 4s-1 &\iff 3\mu t - 1 < (4s-1)(1-\mu t)\\
&\iff 3\mu t - 1 < 4s - 1 - 4s\mu t + \mu t\\
&\iff 2\mu t + 4s\mu t < 4s\\
&\iff \mu t(1+2s) < 2s\\
&\iff \mu < \frac{2\sin\theta}{\tan\theta\,(1+2\sin\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta},
\end{aligned}$$

最後一步除以了 $t(1+2s) > 0$。這就是所求的條件。

桿起初處於平衡狀態，所以在 $k = 0$ 時兩個臨界值都尚未被越過。由於每個條件都是「k 大於某個值」，兩個臨界值都只會被越過一次。所以比較兩個臨界值，確實能決定哪件事先發生。

驗算

- 改為對 B 取力矩，會得到相同的答案。A 處的力對 B 的力矩是 $R \cdot 2a\cos\theta - F \cdot 2a\sin\theta$，而重量的力矩是 $Wa\cos\theta$。代入 R 和 F 的值，得 $\frac{1}{2}(2k+3)Wa\cos\theta - \frac{1}{2}(2k+1)Wa\cos\theta = Wa\cos\theta$，恰好與重量的力矩平衡。
- 取 $\theta = 30°$。那麼 $k_{\text{斷裂}} = \frac{1}{2}$，而臨界摩擦係數（coefficient of friction）是 $2\cos 30°/(1+2\sin 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$，所以 $\mu t = 0.866 \times 0.577 = \frac{1}{2}$。在這個 μ 下，$k_{\text{滑動}} = \frac{3/2-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ 也成立，所以兩個臨界值重合，正如在邊界上應有的情況。
- 我們用電腦驗證了，對許多隨機的 θ 和 k，所有力和力矩都平衡。我們亦對隨機的 θ 和 μ 把 k 逐小步增大：環先滑動，當且僅當 $\mu < 2\cos\theta/(1+2\sin\theta)$。

常見錯誤

- 在對 A 取力矩時忘記了張力的水平分量。它的力臂是 $2a\sin\theta$，並令張力的力矩加倍，$4\sin\theta$ 中的 4 正是由此而來。
- 取 $R = (1+k)W$。繩子承擔了部分重量，所以法向反作用力小於總負載。
- 除以 $1 - \mu\tan\theta$ 時沒有說明它是正數。題目給出的條件 $\mu\tan\theta < 1$ 正是為此而設。

STEP 之外

這是一個靜定（statically determinate）問題：有三個未知量（T、R、F），而平面上的剛體有三條平衡方程。第 (iii) 部分展示了這類結構典型的失效方式：比較每個約束分別在多大負載下失效。工程師也會問同樣的問題：結構中哪一個構件會最先失效？Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細講解剛體靜力學和扭矩（torque），並進而討論轉動動力學（rotational dynamics）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。