詳細解答

STEP II 2019，第 1 題

純數學 • 三次曲線的切線

STEP II 2019，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

先寫出 $x = a$ 處的切線(tangent)通過 $(p, 0)$ 的條件，再代入 $f(x) = (x - p)g(x)$：幾乎所有項都互相抵消，只剩下 $g'(a)$ 的某個倍數。因此，對於三次函數（cubic）而言，從根 p 出發的切線與曲線相切之處，正是另一個二次因式(quadratic factor)取駐值(stationary)之處，即另外兩個根的正中間。第 (ii) 部分則歸結為比較兩個斜率（gradient），以及把「切線與三次曲線交點」的方程因式分解(factorise)；這個方程在接觸點(point of contact)處必定有一個重根（double root）。

解答

開首的結果

$x = a$ 處的切線為 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$。由乘積法則（product rule），$f'(x) = g(x) + (x - p)g'(x)$。切線通過 $(p, 0)$ 當且僅當

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) + f'(a)(p - a) \\ &= (a - p)g(a) + [g(a) + (a - p)g'(a)](p - a) \\ &= (a - p)g(a) - (a - p)g(a) - (a - p)^2 g'(a) \\ &= -(a - p)^2 g'(a). \end{aligned}$$

由於 $a \neq p$，因子 $(a - p)^2$ 不為零，所以上式成立當且僅當 $g'(a) = 0$。這就一次過證明了結果的兩個方向。

第 (i) 部分

此處 $f(x) = (x-p)g(x)$，其中 $g(x) = A(x-q)(x-r) = A(x^2-(q+r)x+qr)$，所以 $g'(x) = A(2x-(q+r))$。由開首的結果，並因為 $A \neq 0$，

$$g'(a) = 0 \iff 2a = q+r.$$

（注意 $a = \frac{1}{2}(q+r) > q > p$，所以 $a \neq p$，符合要求。）

至於斜率，由於 $g'(a) = 0$，有 $f'(a) = g(a) + (a-p)g'(a) = g(a)$。利用 $a-q = \frac{1}{2}(r-q)$ 及 $a-r = -\frac{1}{2}(r-q)$，

$$f'(a) = A \cdot \tfrac{1}{2}(r-q) \cdot (-\tfrac{1}{2}(r-q)) = -\frac{A(r-q)^2}{4}.$$

第 (ii) 部分

現在改為抽出根 r：$f(x) = (x-r)h(x)$，其中 $h(x) = A(x-p)(x-q)$。開首的結果以 r 代替 p 後同樣適用（推導中完全沒有用到選了哪一個根），所以 $x = c$ 處的切線通過 $(r,0)$ 當且僅當 $h'(c) = 0$，即 $c = \frac{1}{2}(p+q)$。與第 (i) 部分完全一樣，其斜率為

$$f'(c) = h(c) = A \cdot \tfrac{1}{2}(q-p) \cdot (-\tfrac{1}{2}(q-p)) = -\frac{A(q-p)^2}{4}.$$

因此，由於 $A \neq 0$，

$$\text{兩切線平行} \iff (r-q)^2 = (q-p)^2 \iff r-q = q-p \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r),$$

其中中間一步用到 $r-q > 0$ 及 $q-p > 0$，所以可以取正平方根。

想一想 不解三次方程，怎樣找出切線與三次曲線的另一個交點？

我們其實已經知道一個根，而且是重複兩次的：接觸點。在 $x = q$ 處，斜率為 $f'(q) = A(q-p)(q-r)$（乘積法則中另外兩項因含有 $x-q$ 而消失），且 $f(q) = 0$，所以該處的切線為 $y = A(q-p)(q-r)(x-q)$。它與曲線相交於

$$A(x-p)(x-q)(x-r) = A(q-p)(q-r)(x-q).$$

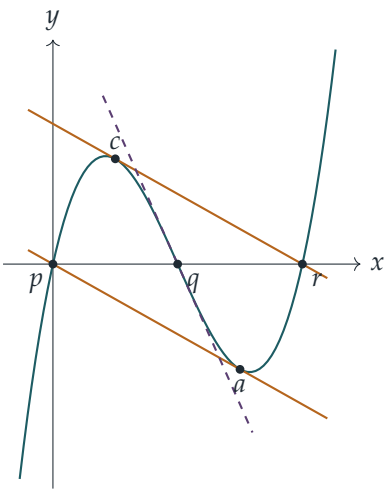
兩邊除以 $A \neq 0$ 並抽出因子 $x-q$，

$$\begin{aligned} 0 &= (x-q)[(x-p)(x-r) - (q-p)(q-r)] \\ &= (x-q)[x^2 - q^2 - (p+r)(x-q)] \\ &= (x-q)^2(x+q-p-r). \end{aligned}$$

所以切線與曲線相交於 $x = q$（一個重根，正如接觸點所應有的）及 $x = p+r-q$，除此以外再無其他交點。切線不會再與曲線相交，當且僅當這第三個根與 q 重合：

$$p+r-q = q \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r).$$

這與之前的條件相同，所以第 (i) 及第 (ii) 部分的兩條切線互相平行，當且僅當 $x = q$ 處的切線不再與曲線相交。



草圖顯示 $q = \frac{1}{2}(p+r)$ 的情況：兩條切線(琥珀色)互相平行，而 q 處的切線(虛線)在該點穿過曲線，卻不在其他任何地方與曲線相交，因為此時 q 正是拐點 (point of inflection)。

驗算

- 取 $p = 0$、$q = 1$、$r = 2$、$A = 3$，則 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$。於是 $f'(x) = 9x^2 - 18x + 6$，得 $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$ 及 $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$，兩者都等於 $-A(r-q)^2/4 = -A(q-p)^2/4 = -\frac{3}{4}$，所以兩切線平行；這與預測相符，因為 q 是 p 與 r 的中點 (midpoint)。
- $x = \frac{3}{2}$ 處的切線為 $y = -\frac{9}{8} - \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})$，在 $x = 0$ 時其值為 0：它確實通過 $(p, 0)$。
- 以上所有恆等式亦已用電腦以精確算術，就大約二千組隨機選取的 $p < q < r$ 及 A 驗證過。

常見錯誤

- 忘記正是 $a \neq p$ 才容許我們約去 $(a-p)^2$；沒有這個條件，「僅當」方向便不成立，因為 p 處本身的切線必定通過 $(p, 0)$。
- 寫出 $(r-q)^2 = (q-p)^2 \Rightarrow r - q = q - p$，卻沒有說明為何排除負根。
- 嘗試從頭解三次方程求交點，而不利用接觸點處已知的重根。

STEP 之外

$x = q$ 處的切線之所以特別，是因為此時 q 是拐點，亦即三次曲線的對稱中心（centre of symmetry）：每條三次曲線繞其拐點作半周旋轉（half-turn）後都保持不變，這正是兩條切線變得平行的原因。這裏的切線與弦（chord）構作，是邁向三次曲線幾何的第一步；在那裏，直線與三次曲線的第三個交點被用來定義曲線上點的加法（橢圓曲線（elliptic curves））。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）有更多同類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。