詳細解答

STEP I 2019，第 9 題

力學 • 傾倒與摩擦力

STEP I 2019，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

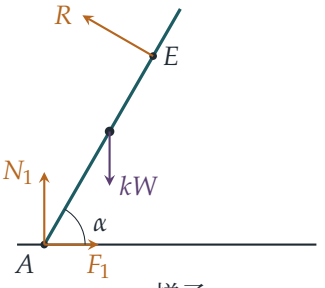
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

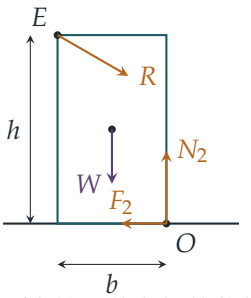
把梯子和箱子看作兩個獨立的物體，兩者之間只靠一個力相連。由於接觸處光滑（smooth），這個力垂直於梯子，所以它的作用線由 α 決定，只有大小是未知的。對梯子以其底端取力矩（moments），可求出這個力的大小；對箱子以它將要翻倒（topple）所繞的那條棱取力矩，便得到翻倒的條件。關係式 $h = b\tan\alpha$ 的作用，是讓箱子的力矩化簡成一個倍角表達式。

解答

把箱子視為均勻的剛性長方體（rigid cuboid），梯子視為輕桿（light rod），油漆工視為質點（particle）。梯子與箱子之間的接觸是光滑的；兩處與地面的接觸都是粗糙（rough）的。設 E 為梯子所接觸的那條棱，A 為梯子的底端，O 為箱子底部離梯子最遠的那條棱（即箱子翻倒時所繞的棱）。



梯子



箱子（處於即將翻倒的狀態）

第 (i) 部分

由於 E 處沒有摩擦，箱子對梯子的作用力 R 垂直於梯子。因為 E 位於高度 h，沿梯子量度有 $AE = h/\sin\alpha$。當油漆工位於高度 λh 時，其沿梯子與 A 的距離為 $\lambda h/\sin\alpha$，所以與 A 的水平距離為 $\lambda h\cot\alpha$。

梯子是輕的，所以對 A 的力矩只來自 R 和油漆工的重量（N_1 和 F_1 都作用於 A）。由於 R 垂直於 AE，它的力臂就是 AE 本身：

$$R\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = kW\cdot\lambda h\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad R = k\lambda W\cos\alpha,$$

即為所求。（嚴格來說，這在攀爬的每一階段都成立，其中 λh 是油漆工當時的高度。）

第 (ii) 部分

根據牛頓第三定律（Newton's third law），梯子在 E 處以垂直於梯子、指向箱子內部的力 R 推動箱子。它的分量是水平方向的 $R\sin\alpha$（背離梯子，指向 O）及豎直向下的 $R\cos\alpha$。

當箱子即將繞 O 翻倒時，地面的反作用力完全作用於 O，所以 N_2 和 F_2 對 O 沒有力矩。對 O 取力矩，以順時針方向（即箱子翻倒的方向）為正。E 與 O 的水平距離為 b，並位於 O 上方高度 h 處，所以

- 水平分量 $R\sin\alpha$ 作用於高度 h，其力矩為 $+Rh\sin\alpha$；
- 豎直分量 $R\cos\alpha$ 作用於 O 靠梯子一側、距離為 b 處，其力矩為 $-Rb\cos\alpha$（在那一側向下壓會阻止翻倒）；
- 重量 W 作用於與 O 距離 $\frac{1}{2}b$ 處，其力矩為 $-\frac{1}{2}Wb$。

當總力矩達到零時，箱子開始翻倒：

$$R(h\sin\alpha - b\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}Wb.$$

> **想一想** $h = b\tan\alpha$ 在這裏有甚麼幫助？

代入後得

$$h\sin\alpha - b\cos\alpha = b\,\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

利用第 (i) 部分的 $R = k\lambda W\cos\alpha$，條件變為

$$-k\lambda W\cos\alpha\cdot\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}Wb \quad\Longrightarrow\quad 2k\lambda\cos 2\alpha + 1 = 0,$$

即為所求。注意這要求 $\cos 2\alpha < 0$，即 $\alpha > 45°$，這與 $h > b$ 一致。

第 (iii) 部分

對箱子分解力（地面對它的反作用力有指向梯子的分量 F_2 和向上的分量 N_2）：

$$F_2 = R\sin\alpha, \qquad N_2 = W + R\cos\alpha.$$

箱子不滑動，所以 $F_2 \le \mu N_2$，即 $\mu \ge \dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha}$。

> **想一想** 在攀爬過程中的哪一刻，這個條件最難滿足？

比值 $\dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{W/R + \cos\alpha}$ 隨 R 遞增，而 R 隨油漆工往上爬而增大。所以對摩擦力要求最大的時刻就是即將翻倒的一刻，我們需要不等式在該處成立。由 (ii)，$k\lambda = -\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$，所以

$$R = -\frac{W\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}.$$

於是

$$R\sin\alpha = -\frac{W\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = -\frac{W\sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha},$$

$$W + R\cos\alpha = W\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha}\right) = W\,\frac{4\cos 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)}{4\cos 2\alpha} = W\,\frac{3\cos 2\alpha - 1}{4\cos 2\alpha},$$

這裏用了 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$。兩式相除，得

$$\mu \ge \frac{-\sin 2\alpha}{3\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 3\cos 2\alpha},$$

即為所求。由於 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ 給出 $\sin 2\alpha > 0$ 及 $\cos 2\alpha < 0$，分子和分母都是正數。

驗算

- 取 $\alpha = 60^\circ$，則 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$。第 (ii) 部分給出 $k\lambda = 1$，所以 $R = \frac{1}{2}W$。於是 $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}W$ 及 $N_2 = \frac{5}{4}W$，得 $\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.346$，與 $\sin 120^\circ/(1 - 3\cos 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\big/\frac{5}{2}$ 吻合。
- 當 $\alpha \to 45^\circ$（箱子接近正方體，高度只是略大於寬度），$\cos 2\alpha \to 0$，而 (ii) 要求 $k\lambda \to \infty$：E 處的推力幾乎沿着直線 EO，所以幾乎沒有轉動效果。這與幾何吻合：由於 $h = b\tan\alpha$，當 α 接近 45° 時，通過 E 的 R 的作用線差不多經過 O。
- 力矩方程、翻倒高度和摩擦力的界限，亦已用電腦就 α、b、k 和 W 的多組隨機取值驗證。

常見錯誤

- 把 E 處的力當作水平方向（就像光滑牆壁的情況）。這裏的接觸是與一條棱接觸，所以力垂直於梯子。

- 忘記 R 的豎直分量會加到箱子的法向反作用力（normal reaction）上，因此 $N_2 = W + R\cos\alpha$，而不是 W。
- 對箱子底部錯誤的那條棱取力矩：箱子是繞離梯子較遠的那條棱翻倒的。

STEP 之外

這是雙物體靜力學（statics）：把每個物體分開考慮，在接觸處運用牛頓第三定律，並選取能消去未知量的力矩中心。物體會先滑動還是先翻倒、隨着負載增加哪個約束會最先失效，這些問題貫穿工程力學以及接觸剛體的研究。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種精神處理剛體靜力學與摩擦。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。