詳細解答

STEP I 2019，第 8 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2019，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

題目說明不必求出 f 的表達式，所以每一部分都是要把一個積分改造，直至它的樣子完全變成

$$\int_1^X \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(X)$$

其中 X 是某個積分上限。兩個步驟幾乎完成全部工作：一是伸縮（stretch）（$u = kt$），把 $\frac{u-k}{u+k}$ 變成 $\frac{t-1}{t+1}$；二是平移（shift）（$u = t + c$），使分式中的兩個數關於零對稱。最後一部分還需要多一個代換，把一個商的平方根變成形式合適的函數。

解答

全題都用到這個事實：代換（substitution）會同時改變被積函數（integrand）、微分（differential）以及積分限（limits）；答案正正出現在積分上限之中。

第 (i) 部分

若設 $u = 2t$，被積函數 $\sqrt{\frac{u-2}{u+2}}$ 便會變成 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$，因為此時 $\frac{2t-2}{2t+2} = \frac{t-1}{t+1}$。由於 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$，而積分限為 $u = 2 \mapsto t = 1$、$u = x \mapsto t = \frac{1}{2}x$，

$$\int_2^x \sqrt{\frac{u-2}{u+2}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x/2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x).$$

條件 $x > 2$ 正好保證 $\frac{1}{2}x > 1$，因此 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 有定義。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

這裏分式中的兩個數是 0 和 -4，並不關於零對稱。它們的中點是 -2，所以我們平移 2：設 $u = v - 2$。於是 $\frac{u}{u+4} = \frac{v-2}{v+2}$，$\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$，而積分限 $u = 0, x$ 變成 $v = 2, x+2$。現在以 $x+2$（它大於 2）代替 x 應用第 (i) 部分，便可完成：

$$\int_0^x \sqrt{\frac{u}{u+4}}\,\mathrm{d}u = \int_2^{x+2} \sqrt{\frac{v-2}{v+2}}\,\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x+1).$$

第 (iii) 部分

分式中的兩個數是 5 和 -1，中點是 2。所以設 $u = v+2$，則

$$\frac{u-5}{u+1} = \frac{v-3}{v+3},$$

而積分限 $u = 5, x$ 變成 $v = 3, x-2$。接着伸縮 3 倍，設 $v = 3t$，使得 $\frac{v-3}{v+3} = \frac{t-1}{t+1}$ 及 $\mathrm{d}v = 3\,\mathrm{d}t$，積分限為 $t = 1, \frac{1}{3}(x-2)$：

$$\begin{aligned}\int_5^x \sqrt{\frac{u-5}{u+1}}\,\mathrm{d}u &= \int_3^{x-2} \sqrt{\frac{v-3}{v+3}}\,\mathrm{d}v = \int_1^{(x-2)/3} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,3\,\mathrm{d}t \\ &= 3\,\mathrm{f}\Big(\frac{x-2}{3}\Big).\end{aligned}$$

由於 $x > 5$，自變量 $\frac{x-2}{3}$ 大於 1，這正是應有的情況。（兩個代換可合併為單一代換 $u = 3t+2$。）

第 (iv) 部分

這個被積函數中完全看不到商的平方根，而且次方也不對：分子是 u^2，根號內是 u^2+4。

> **?** **想一想** 甚麼代換可以把 u^2+4 變成第 (ii) 部分中的 $u+4$？

設 $u^2 = w$，則 $u = \sqrt{w}$（在 $[1,2]$ 上 $u > 0$），且 $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}$。積分限 $u = 1, 2$ 變成 $w = 1, 4$，而

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u = \frac{w}{\sqrt{w+4}} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+4}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w,$$

這正是第 (ii) 部分的被積函數。在 0 處把區間分拆，並兩次應用第 (ii) 部分（分別取 $x = 4$ 和 $x = 1$），

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w - \int_0^1 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{f}(3) - 2\,\mathrm{f}(\tfrac{3}{2})\Big) = \mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(\tfrac{3}{2}).\end{aligned}$$

驗算

- 每個答案在積分下限處的表現都正確：在 (i) 中取 $x = 2$，得 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$；在 (ii) 中取 $x = 0$，得 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$；在 (iii) 中取 $x = 5$，得 $3\,\mathrm{f}(1) = 0$。
- 求導是快捷的檢驗方法。對於 (iii)，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,3\,\mathrm{f}\left(\frac{x-2}{3}\right) = \mathrm{f}'\left(\frac{x-2}{3}\right) = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$，與預期相符。
- 以數值計算，(iv) 兩邊都等於 0.91007；而在 (iii) 中取 $x = 11$，兩邊都等於 3.19704，兩者均由直接數值積分（numerical integration）求得。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}t$ 帶來的因子，結果得出 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 而非 $2\,\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$。
- 改了被積函數卻沒有改積分限，尤其是上限——而答案正正就在上限之中。
- 在 (iv) 中只寫出 $\frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{f}(3)$：第 (ii) 部分給出的是由 0 開始的積分，所以必須減去由 0 到 1 的那一段。

STEP 之外

這裏的核心想法是：一整族積分其實只是同一個積分，透過不同的仿射變量代換（affine change of variable）$u = at + b$ 去看而已。辨認出隱藏在表達式中的「標準形式」，是大學分析學以及把微分方程（differential equations）化為標準型（canonical forms）時經常用到的技巧。（事實上，利用雙曲函數（hyperbolic functions）可以求出 f 的閉式（closed form），但這道題顯示，即使不用它也可以走得很遠。）關於代換與積分的嚴謹理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；如想找更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。