詳細解答

STEP I 2019，第 7 題

純數學 • 無理性與同餘

> **STEP I 2019，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

若以最簡形式（lowest terms）寫成 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a/b$，平方兩次便可消去根式（surd），得到一條關於整數 a 和 b 的多項式（polynomial）方程。接著，我們在模（modulo）某個小質數（prime）下考察這條方程。方程迫使該質數要麼同時整除 a 和 b，要麼兩者都不整除。「兩者都整除」與最簡形式矛盾，而餘數則排除了「兩者都不整除」的情況。整個技巧的精髓，在於選出一個能令餘數真正產生衝突的質數。

解答

第 (i) 部分

步驟 1。每個整數都可寫成 $3k$、$3k+1$ 或 $3k-1$（其中 k 為某整數），因此若 $3\nmid a$，則 $a=3k\pm1$。無論哪種情況，

$$a^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1,$$

即比 3 的某個倍數大一。

步驟 3。將 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 平方，得

$$\frac{a^2}{b^2}=2+2\sqrt{6}+3,\qquad\text{故}\qquad a^2-5b^2=2\sqrt{6}\,b^2.$$

現在根式已單獨置於一邊，再平方一次便可把它消去：

$$a^4-10a^2b^2+25b^4=24b^4,$$
$$a^4+b^4=10a^2b^2,$$

此即所求。（我們只需要這個方向的蘊涵：步驟 2 中的任何 a, b 都必須滿足這條方程。）

步驟 4。假設 $3 \mid a$。將步驟 3 的結果移項，

$$b^4 = 10a^2b^2 - a^4 = a^2\,(10b^2 - a^2),$$

而右方可被 3 整除（甚至可被 9 整除）。若 $3 \nmid b$，則由步驟 1 得 $b^2 = 3m + 1$，於是 $b^4 = (b^2)^2 = 9m^2 + 6m + 1$ 不是 3 的倍數，矛盾。因此 $3 \mid b$。

> **想一想** 步驟 4 處理了 $3 \mid a$ 的情況。那麼 3 既不整除 a 也不整除 b 的情況又如何？

步驟 5。步驟 3 中的方程對 a 和 b 是對稱的，所以把兩者的角色互換後，步驟 4 依然成立：若 $3 \mid b$，則 $3 \mid a$。由於 a 和 b 沒有大於一的公因數，它們不會同時是 3 的倍數，故由步驟 4，兩者都不是 3 的倍數。步驟 2 至 4 並未涵蓋這種情況，而這正是步驟 1 派上用場之處。設 $a^2 = 3r + 1$ 及 $b^2 = 3s + 1$。那麼 a^4、b^4 和 a^2b^2 都比 3 的某個倍數大一（兩個這類數的乘積仍具有此形式）。在模 3 下考察步驟 3 的方程，

$$a^4 + b^4 \equiv 1 + 1 = 2, \qquad 10a^2b^2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \pmod 3,$$

因為 $10 \equiv 1$。步驟 3 中方程兩邊除以 3 的餘數不同，這是不可能的。所以這樣的 a 和 b 並不存在。此外，$\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$，所以若它是有理數，便可寫成 a, b 均為正數且互質（coprime）的形式。因此 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是無理數（irrational）。

第 (ii) 部分

假設 $\sqrt{6} + \sqrt{7} = a/b$，其中 a, b 為正整數，且沒有大於一的公因數。與之前一樣，

$$\frac{a^2}{b^2} = 13 + 2\sqrt{42} \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - 13b^2)^2 = 168\,b^4,$$

展開得 $a^4 - 26a^2b^2 + 169b^4 = 168b^4$，即

$$a^4 + b^4 = 26a^2b^2.$$

模 5 下的平方數。若 $5 \nmid a$，則 $a = 5k \pm 1$ 或 $a = 5k \pm 2$，從而

$$a^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \qquad \text{或} \qquad a^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

所以 $a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$，因此 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$。

整除性。若 $5 \mid a$，則 $b^4 = a^2(26b^2 - a^2)$ 是 5 的倍數。但若 $5 \nmid b$，則 $b^4 \equiv 1 \pmod 5$，所以必有 $5 \mid b$。由對稱性，$5 \mid b$ 蘊涵 $5 \mid a$。由於 a 和 b 互質，兩者都不能被 5 整除。

矛盾。現在 $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$，而 $a^2b^2 \equiv (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \pmod 5$。由於 $26 \equiv 1$，

$$a^4 + b^4 \equiv 2, \qquad 26a^2b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

但 $2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$，所以方程不可能成立。因此 $\sqrt{6} + \sqrt{7}$ 是無理數。

想一想 若我們在這裏嘗試用 3 代替 5，哪一步會失效？

為何 3 行不通。論證的前半部分在模 3 下依然成立：若 $3 \mid a$，則 $3 \mid b^4$，故 $3 \mid b$，所以 a 和 b 都不是 3 的倍數。但此時 $a^4 \equiv b^4 \equiv a^2b^2 \equiv 1 \pmod 3$，而由於 $26 \equiv 2 \pmod 3$，

$$a^4 + b^4 \equiv 2 \qquad \text{及} \qquad 26a^2b^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

兩邊一致，因此沒有矛盾。在模 3 下，每一對非 3 的倍數都滿足方程 $a^4 + b^4 = 26a^2b^2$，所以單靠被 3 整除的性質無法排除它。（在第 (i) 部分，係數是 $10 \equiv 1$，而 $2 \neq 1$ 造成了衝突。這裏係數是 $26 \equiv 2$，所以衝突消失了。）

驗算

- 數值上，$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.1463$ 使 $x^4 - 10x^2 + 1 \approx 0$（誤差約為 10^{-14}）。同樣，$y = \sqrt{6} + \sqrt{7} \approx 5.0952$ 使 $y^4 - 26y^2 + 1 \approx 0$。所以這兩條四次方程是正確的。
- 逐一嘗試每一對餘數：$a^4 + b^4 \equiv 10a^2b^2 \pmod 3$ 的唯一解是 $a \equiv b \equiv 0$，而 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 5$ 亦然。但 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 3$ 還有 $(1,1)$、$(1,2)$、$(2,1)$ 和 $(2,2)$ 這些解。這正是 3 在第 (ii) 部分行不通的原因。
- 電腦搜尋顯示，不存在滿足任一方程且 $a, b \leq 400$ 的互質正整數 a, b。

常見錯誤

- 在步驟 4 後便停下。步驟 4 只說明 a 和 b 不能是 3 的倍數，你仍需要步驟 1 去處理兩者都不是 3 的倍數的情況。
- 未給理由便斷言 $3 \mid b^4 \Rightarrow 3 \mid b$。步驟 1 正好提供了理由：若 $3 \nmid b$，則 b^4 的餘數是 1。
- 在第 (ii) 部分，忘記了平方數在模 5 下的餘數可以是 4（即 -1），所以 a^2b^2 可以 $\equiv \pm 1$，而不只是 1。

STEP 之外

數 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是 $x^4 - 10x^2 + 1$ 的根，而這裏的論證實際上是在證明這個多項式沒有有理根。有理根定理（rational root theorem）提供了一條更快的途徑：任何有理根都必須是 ± 1，而兩者都不成立。把多項式在模某個質數下約化，藉此證明它沒有根或因式，是大學一年級代數中的標準工具（例如用於不可約性（irreducibility）檢驗）。有趣的是，儘管 $x^4 - 10x^2 + 1$ 在有理數上不可約，它在模每一個質數下卻都可以因式分解，這是一個著名的例子。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）進一步發展了這些概念，

而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）則是一本關於同餘（congruences）的精彩入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。