詳細解答

STEP I 2019，第 6 題

純數學 • 不等式與界限

STEP I 2019，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

每條方程直接求解看來都無從入手，但可以把它拆成「某式 = 另一式」的形式，其中左邊永遠不會小於某個數，而右邊永遠不會大於同一個數。於是方程只在兩邊都恰好等於那個數時才成立，而這兩個條件各自都很容易求解。每一部分前面的小題，正是為了建立這兩個界（bound）。

解答

第 (i) 部分

配方（completing the square），

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x\cos\theta + 4 &= (3x - 2\cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta + 4 \\ &= (3x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta. \end{aligned}$$

平方數永不為負，所以最小值是 $4\sin^2\theta$，當且僅當 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ 時取得。

把這個四次式（quartic）看成 x^2 的二次式（quadratic），

$$12x^2\sin\theta - 9x^4 = -(3x^2 - 2\sin\theta)^2 + 4\sin^2\theta.$$

所以 $12x^2\sin\theta - 9x^4 \le 4\sin^2\theta$，當且僅當 $x^2 = \frac{2}{3}\sin\theta$ 時取等號。由於 $0 < \theta < \pi$，我們有 $\sin\theta > 0$，所以 x^2 確實可以取這個值，而最大值是 $4\sin^2\theta$。

現在把所給方程中的 x^2 項拆成 $9x^2 - 12x^2\sin\theta$，再移項整理：

$$\underbrace{9x^2 - 12x\cos\theta + 4}_{\ge 4\sin^2\theta} = \underbrace{12x^2\sin\theta - 9x^4}_{\le 4\sin^2\theta}.$$

想一想 一個至少是 $4\sin^2\theta$ 的量，怎樣才能等於一個至多是 $4\sin^2\theta$ 的量？

只有兩者都等於 $4\sin^2\theta$ 才行。所以方程成立當且僅當同時有

$$x = \tfrac{2}{3}\cos\theta \qquad 和 \qquad x^2 = \tfrac{2}{3}\sin\theta.$$

消去 x：$\frac{4}{9}\cos^2\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$，所以 $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$，即 $2 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta$。因此

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0.$$

由於 $\sin\theta \neq -2$，得 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\theta = \frac{5\pi}{6}$。再由 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ 分別得 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$，而兩種情況下都有 $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sin\theta$，符合要求。解為

$$(x,\theta) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\pi}{6}\right) \quad 和 \quad (x,\theta) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{5\pi}{6}\right).$$

第 (ii) 部分

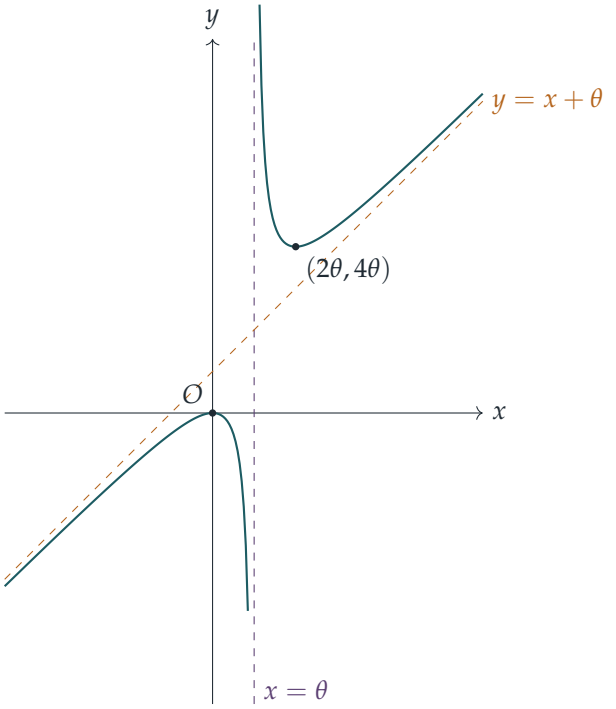
草圖。這裏 $\theta > 0$。曲線 $y = \dfrac{x^2}{x-\theta}$ 經過原點（而且不在其他地方與坐標軸相交），並有鉛垂漸近線（vertical asymptote）$x = \theta$。作除法，

$$\frac{x^2}{x-\theta} = x + \theta + \frac{\theta^2}{x-\theta},$$

所以 $y = x + \theta$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote）；當 $x > \theta$ 時曲線在它上方，當 $x < \theta$ 時曲線在它下方。用商法則（quotient rule）求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x-\theta) - x^2}{(x-\theta)^2} = \frac{x(x-2\theta)}{(x-\theta)^2},$$

所以駐點（stationary point）是局部極大點 $(0,0)$ 和局部極小點 $(2\theta, 4\theta)$（斜率在 $x = 0$ 處由 $+$ 變為 $-$，在 $x = 2\theta$ 處由 $-$ 變為 $+$）。



推論。若 $x < \theta$，分子 $x^2 \geq 0$ 而分母為負，所以 $y \leq 0$。若 $x > \theta$，該分支的最低點是 $(2\theta, 4\theta)$，所以 $y \geq 4\theta$。用代數方法說明：當 $x > \theta$ 時，

$$x^2 - 4\theta(x-\theta) = (x-2\theta)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x-\theta} \geq 4\theta,$$

這裏除以了正數 $x-\theta$。所以曲線永遠不會取嚴格介乎 0 與 4θ 之間的值。

三角函數的界。分子滿足 $\sin^2\theta\cos^2 x \leq 1 \cdot 1 = 1$，分母滿足 $1 + \cos^2\theta\sin^2 x \geq 1$。一個至多為 1 的數除以一個至少為 1（且為正）的數，結果至多為 1：

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2 x}{1+\cos^2\theta\sin^2 x} \leq 1.$$

要取等號，必須同時有 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$ 和 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$。另外留意這個分式 ≥ 0，因為它是平方數除以正數。

最後的方程。記 $L = \dfrac{x^2}{4\theta(x-\theta)}$，並以 R 表示右邊。把前面的結果除以 $4\theta > 0$，得 $L \leq 0$ 或 $L \geq 1$。但 $0 \leq R \leq 1$。

想一想 一個 ≤ 0 或 ≥ 1 的數，能在哪裏與 $[0,1]$ 中的數相等？

只能在 0 或 1。所以我們需要 $L = R = 0$ 或 $L = R = 1$。

► $L = 0$ 迫使 $x = 0$，但這時 $R = \sin^2\theta > 0$，因為 $0 < \theta < \pi$。無解。

- $L = 1$ 表示 $x^2 = 4\theta(x-\theta)$，即 $(x-2\theta)^2 = 0$，所以 $x = 2\theta$。$R = 1$ 需要 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$，這迫使 $\sin^2\theta = 1$ 和 $\cos^2 x = 1$。由於 $0 < \theta < \pi$，得 $\theta = \frac{\pi}{2}$，所以 $x = \pi$，而且確實有 $\cos^2\pi = 1$ 和 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$。

唯一的解是 $x = \pi$，$\theta = \frac{\pi}{2}$。

驗算

- 把 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入四次方程：$9\cdot\frac{1}{9} + (9-6)\cdot\frac{1}{3} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 1+1-6+4 = 0$。
- 在最後的方程中取 $x = \pi$，$\theta = \frac{\pi}{2}$：$L = \pi^2/(2\pi\cdot\frac{\pi}{2}) = 1$，而 $R = 1\cdot 1/(1+0) = 1$。
- 用電腦在 (x,θ) 的細密網格上搜尋，兩條方程都沒有找到其他近似解，只有在被排除的端點 $\theta \to 0$ 和 $\theta \to \pi$ 附近出現一些虛假的近似解（那裏 $\sin\theta \to 0$，兩個界都失效）。

常見錯誤

- 求得 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 就停下來：x 必須滿足 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$，這對每個 θ 都確定了 x 的正負號，所以 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{6})$ 不是解。
- 在最後一部分忘記考慮 $L = R = 0$ 的情況；這個情況必須排除，而它之所以能被排除，只是因為 $\sin\theta \neq 0$。
- 聲稱分式 ≤ 1「因為 $\sin^2$ 和 $\cos^2$ 都不超過 1」，卻沒有說明為何分母不會破壞這個結論。

STEP 之外

把一條方程夾在一個下界和一個上界之間、而兩者只在單一值相遇，這個技巧是分析學（analysis）的常用手法：證明 AM–GM（算術–幾何平均）不等式或柯西–施瓦茨（Cauchy–Schwarz）不等式何時取等號，就是這樣做的；夾逼定理（squeeze theorem）確定極限，也是靠這個道理。學會問「這個不等式何時取等號？」，往往是找到解法的捷徑。想看更多同類思路，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析學》），或 Siklos 的習題集 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。