詳細解答

STEP I 2019，第 5 題

純數學 • 三維向量

> **STEP I 2019，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

兩個向量（vector）相等，當且僅當它們的分量（component）全部相同，因此題中每個幾何條件都可化為關於 p、q、r 和 s 的幾條簡單方程。四點共面（coplanar）等價於純量三重積（scalar triple product）（即一個 3×3 行列式（determinant））等於零。把條件用坐標寫出後，每一部分都只是簡短的代數運算。

解答

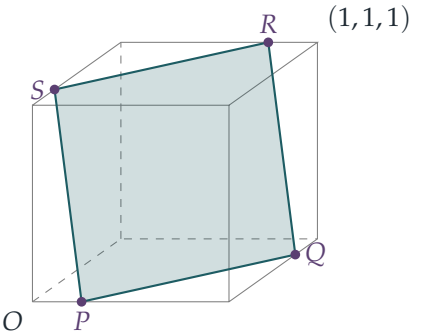
第 (i) 部分

若 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$，則對邊 PQ 與 SR 平行且等長，所以 $PQRS$ 是**平行四邊形**（parallelogram）。（此時由 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{SR}$ 亦得 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$。）

若同時有 $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PS}|$，則平行四邊形的兩條鄰邊相等，因而四條邊全部相等：$PQRS$ 是**菱形**（rhombus）。

第 (ii) 部分：共面條件

各點位於單位立方體（unit cube）的棱上，所以 $p, q, r, s \in [0, 1]$。這裏 P 和 Q 位於面 $z = 0$ 上，而 R 和 S 位於面 $z = 1$ 上。



四點共面，當且僅當 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PS}$ 和 $\overrightarrow{PR}$ 線性相關（linearly dependent），亦即它們的純量三重積為零。由

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -p \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r-p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

沿第一行展開行列式，得

$$\begin{vmatrix} 1-p & q & 0 \\ -p & s & 1 \\ r-p & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-p)(s-1) - q(-p-(r-p)) + 0$$
$$= (1-p)(s-1) + qr.$$

令其等於零，即得 $rq = (1-s)(1-p)$，正是所求。

如果你想避開行列式，可把經過 P、Q、R 的平面寫成 $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR}$，其上的點為

$$(p + \lambda(1-p) + \mu(r-p),\ \lambda q + \mu,\ \mu).$$

要 $S = (0, s, 1)$ 在此平面上，由 z 分量需 $\mu = 1$，再由 y 分量得 $\lambda q = s - 1$，由 x 分量得 $r + \lambda(1-p) = 0$。把最後一條方程乘以 q 並代入，得 $rq + (s-1)(1-p) = 0$，即同一條件。（這裏用到 P、Q、R 不共線（collinear），這是成立的，因為 R 在頂面，而 P、Q 在底面。）

第 (ii)(a) 部分

我們有

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} r \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

兩者的 z 分量已經相同，所以

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \iff r = 1-p \text{ 且 } q = 1-s \iff p+r = 1 \text{ 且 } q+s = 1.$$

形心（centroid）為

$$\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} p+1+r \\ q+1+s \\ 2 \end{pmatrix},$$

而立方體的中心是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。第三個分量總是相同，所以形心位於中心當且僅當 $p+1+r=2$ 且 $q+1+s=2$，這正是同樣的兩個條件 $p+r=1$、$q+s=1$。因此兩個命題等價。

（留意當 $r=1-p$ 且 $s=1-q$ 時，共面條件 $rq=(1-s)(1-p)$ 變成 $(1-p)q=q(1-p)$，自動成立：沒有任何位置被排除。）

第 (ii)(b) 部分

由 (a)，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ 給出 $r=1-p$ 及 $s=1-q$。對於第二個條件，比較長度的平方，並利用 $\overrightarrow{PS}=(-p,\,s,\,1)$ 及 $s=1-q$：

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 &\iff (1-p)^2+q^2 = p^2+(1-q)^2+1 \\ &\iff 1-2p = 2-2q \\ &\iff q = p+\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$q = p+\tfrac{1}{2}, \qquad r = 1-p, \qquad s = \tfrac{1}{2}-p.$$

由於 $q \le 1$ 及 $s \ge 0$，只有當 $0 \le p \le \frac{1}{2}$ 時各點才位於棱上。

想一想 哪兩個向量給出角 PQR？

在 Q 處的角是 $\overrightarrow{QP}$ 與 $\overrightarrow{QR}$ 之間的夾角（兩者都背離 Q）。利用剛求得的值，

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ -p-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r-1 \\ 1-q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{2}-p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

於是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} &= -p(p-1)-(p+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-p) = p-p^2-(\tfrac{1}{4}-p^2) = p-\tfrac{1}{4}, \\ |\overrightarrow{QP}|^2 &= (1-p)^2+(p+\tfrac{1}{2})^2 = 2p^2-p+\tfrac{5}{4}, \\ |\overrightarrow{QR}|^2 &= p^2+(\tfrac{1}{2}-p)^2+1 = 2p^2-p+\tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

兩個長度相等，這正是菱形應有的性質，所以

$$\cos PQR = \frac{p-\frac{1}{4}}{2p^2-p+\frac{5}{4}} = \frac{4p-1}{5-4p+8p^2},$$

這是把分子分母同乘以 4 所得。這就是所求的結果。

正方形。 菱形是正方形，當且僅當它的角都是直角，即 $\cos PQR = 0$。分母 $8p^2-4p+5 = 8(p-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{2}$ 恆為正，所以這只在 $4p-1=0$ 時發生：

$$p=\tfrac{1}{4}, \qquad q=\tfrac{3}{4}, \qquad r=\tfrac{3}{4}, \qquad s=\tfrac{1}{4}.$$

此時邊長的平方為

$$2\cdot\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{4}=\tfrac{9}{8},$$

所以每條邊的長度為 $\sqrt{9/8}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$。要與 $\frac{21}{20}$ 比較，可比較這兩個正數的平方：

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 = \tfrac{441}{400} < \tfrac{450}{400} = \tfrac{9}{8}.$$

因此正方形的邊長大於 $\frac{21}{20}$。（實際上約為 1.0607。）

驗算

- 當 $p=\frac{1}{4}$ 時，四點為 $(\frac{1}{4},0,0)$、$(1,\frac{3}{4},0)$、$(\frac{3}{4},1,1)$、$(0,\frac{1}{4},1)$；它們的平均值是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，與 (a) 的預測一致，而直接計算亦得 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0$。
- 當 $p=0$ 時，公式給出 $\cos PQR=-\frac{1}{5}$。直接計算：$\overrightarrow{QP}=(-1,-\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{QR}=(0,\frac{1}{2},1)$，點積（dot product）為 $-\frac{1}{4}$，長度平方均為 $\frac{5}{4}$，所以 $\cos PQR=-\frac{1}{5}$。✓
- 共面恆等式、(a) 中的等價關係及 $\cos PQR$ 的公式，均已用電腦以精確算術在大量隨機數值上驗證。

常見錯誤

- 用 $\overrightarrow{QP}$ 和 $\overrightarrow{RQ}$（一個指向 Q，一個背離 Q）求在 Q 處的角：這會令餘弦的符號相反。
- 弄錯字母次序：$\overrightarrow{SR}$ 是 $R-S$，不是 $S-R$。
- 單憑計算機數值就斷言 $\frac{3\sqrt{2}}{4}>\frac{21}{20}$，而沒有作精確比較；由於兩者都是正數，把兩邊平方可以保持論證嚴謹。

STEP 之外

用行列式判斷共面，是一個一般事實在三維的特例：一組向量線性相關，當且僅當由它們組成的矩陣（matrix）的行列式為零。立方體的平面截面也是豐富的例子來源（經過中心並垂直於一條體對角線的平面，截出一個正六邊形（regular hexagon））。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是從這種幾何觀點出發，發展行列式、體積與線性相關的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。