詳細解答

STEP I 2019，第 4 題

純數學 • 四次方程的因式分解

STEP I 2019，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

沒有 x^3 項的四次多項式（quartic），其各根（roots）之和為零。因此，若把四個根分成兩對，兩對各自的和互為相反數，這正是兩個二次因式（quadratic factors）的 x 係數分別為 s 和 $-s$ 的原因。接着比較係數（comparing coefficients）得出三條方程，消去 p 和 q 後便剩下一個關於 s^2 的三次方程（cubic）。第 (i) 部分是為了處理最後一步的根式（surds）而設。

解答

第 (i) 部分

把 $m+n\sqrt{2}$ 平方得 $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$，所以我們需要 $m^2+2n^2=3$ 及 $mn=1$。取 $m=n=1$ 即可：

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2},$$

而由於 $1+\sqrt{2}>0$，它就是正平方根。因此 $m=1$，$n=1$：

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

同理，$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$。兩個結果我們都會用到。

第 (ii) 部分

為何存在這樣的因式分解。設四個實根為 a、b、c、d，則 $\mathrm{f}(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$。f 中 x^3 的係數是 $-(a+b+c+d)$，而它等於零，所以 $c+d=-(a+b)$。把

根兩兩配對，

$$\mathrm{f}(x) = (x^2 - (a+b)x + ab)(x^2 - (c+d)x + cd) = (x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q),$$

其中 $s = -(a+b)$、$p = ab$、$q = cd$，由於各根皆為實數，它們全都是實數。

三條方程。展開，

$$(x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q) = x^4 + (p + q - s^2)x^2 + s(q-p)x + pq.$$

與 $x^4 - 10x^2 + 12x - 2$ 比較：

$$\begin{aligned} p + q - s^2 &= -10, \\ s(q-p) &= 12, \\ pq &= -2. \end{aligned}$$

關於 s 的方程。第二條方程顯示 $s \neq 0$，所以可以除以 s：$q - p = 12/s$。第一條方程給出 $p + q = s^2 - 10$。現在利用恆等式 $(p+q)^2 - (q-p)^2 = 4pq = -8$：

$$(s^2 - 10)^2 - \frac{144}{s^2} = -8.$$

兩邊乘以 s^2（它不為零）得

$$s^2(s^2 - 10)^2 + 8s^2 - 144 = 0,$$

此即所求。

s^2 的值。設 $u = s^2$。展開，

$$u(u-10)^2 + 8u - 144 = u^3 - 20u^2 + 108u - 144.$$

試代入 144 的較小因數，$u = 2$ 給出 $8 - 80 + 216 - 144 = 0$，所以 $u - 2$ 是一個因式，並且

$$u^3 - 20u^2 + 108u - 144 = (u-2)(u^2 - 18u + 72) = (u-2)(u-6)(u-12).$$

所以 s^2 的三個可能值為 $s^2 = 2$、6 及 12。

> **想一想** 我們只需要一種因式分解，為甚麼 s^2 卻有三個值？

把四個根分成兩對共有三種方法，而每一種配對都給出各自的一對二次因式，且 $s^2 = (a+b)^2$。用任何一種都可以解方程；取最小的值只是令根式最整潔。

解 $\mathrm{f}(x) = 0$。取 $s^2 = 2$ 及 $s = \sqrt{2}$（選 $s = -\sqrt{2}$ 只會把兩個因式對調）。於是

$$p + q = 2 - 10 = -8, \qquad q - p = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2},$$

所以 $p = -4 - 3\sqrt{2}$，$q = -4 + 3\sqrt{2}$。（驗證：$pq = 16 - 18 = -2$。）因此

$$\mathrm{f}(x) = (x^2 + \sqrt{2}\,x - 4 - 3\sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}\,x - 4 + 3\sqrt{2}).$$

第一個因式的判別式（discriminant）為

$$2 + 4(4 + 3\sqrt{2}) = 18 + 12\sqrt{2} = 6(3 + 2\sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2})^2,$$

這裏用了第 (i) 部分的結果，所以其平方根為 $\sqrt{6}(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}$。其根為

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm (\sqrt{6} + 2\sqrt{3})}{2}.$$

第二個因式的判別式為

$$2 - 4(-4 + 3\sqrt{2}) = 18 - 12\sqrt{2} = 6(3 - 2\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2} - 1)^2,$$

其平方根為 $\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$（為正數，因為 $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{6}$）。其根為

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm (2\sqrt{3} - \sqrt{6})}{2}.$$

所以 $\mathrm{f}(x) = 0$ 的四個解為

$$x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2\sqrt{3}), \qquad x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2} - \sqrt{6} - 2\sqrt{3}),$$
$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}), \qquad x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

驗算

- 各根的數值約為 2.2497、-3.6639、1.2144 及 0.1998。它們之和為 0，正如沒有 x^3 項所要求的；它們之積約為 -2，即常數項。
- 代入 $x \approx 0.1998$：$x^4 - 10x^2 + 12x - 2 \approx 0.0016 - 0.3992 + 2.3976 - 2 \approx 0$。
- f 的變號情況吻合：$\mathrm{f}(0) = -2$，$\mathrm{f}(1) = 1$，$\mathrm{f}(2) = -2$，$\mathrm{f}(3) = 25$，$\mathrm{f}(-4) = 46$，所以 $(-4, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 各有一個根。

常見錯誤

- 沒有解釋為何 x 係數是 s 和 $-s$：這源於 x^3 的係數為零，即各根之和為零。
- 除以 s 之前忘記指出 $s \neq 0$。
- 把根寫成 $\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$ 便停下：題目要求完全化簡，而這正是第 (i) 部分的用途。

STEP 之外

這其實是經過包裝的費拉里（Ferrari）四次方程解法：關於 s^2 的三次方程就是*預解三次式*（resolvent cubic），它的三個根對應把四個根兩兩配對的三種方法。為何四次方程可以化為三次方程，而一般的五次方程（quintic）卻根本無法用根式求解（solved by radicals），正是伽羅瓦理論（Galois theory）的主題；這套理論把方程的可解性與其根的對稱性聯繫起來。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是大學一年級邁向這個理論的好途徑。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。