詳細解答

STEP I 2019，第 3 題

純數學 • 積分法

> **STEP I 2019，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

把分子和分母同乘以 $1-\sin x$，就能把 $1+\sin x$ 變成 $1-\sin^2 x = \cos^2 x$，而分母是 $\cos x$ 的冪的式子，都可以拆成幾個標準部分：$\sec^2 x$、$\sec x \tan x$、$\tan^2 x \sec^2 x$ 和 $\sin x / \cos^4 x$，每一個都可以一眼看出其積分（integral）。另外兩個積分其實是同一招的變奏：第二個積分會變成含 $1+\cos x$ 的積分，再用代換（substitution）$x = \frac{1}{2}\pi - u$ 便化為第一類；第三個積分則把因子 $1-\sin x$ 平方。

解答

第一個積分

由於 $(1+\sin x)(1-\sin x) = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$，

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \tan x.$$

我們知道 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \sec^2 x$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x = \sec x \tan x$，所以

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \tan x - \sec x + C. \qquad (*)$$

利用 $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$、$\sec \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$、$\tan 0 = 0$ 及 $\sec 0 = 1$：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = (1-\sqrt{2}) - (0-1) = 2-\sqrt{2}.$$

（乘以 $1-\sin x$ 是可以的，因為在整個區間內 $\sin x < 1$，所以我們從不會乘以零。）

第二個積分

把分子和分母同乘以 $\cos x$（在 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 上不為零），

$$\frac{1}{1+\sec x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} = 1 - \frac{1}{1+\cos x}. \tag{*}$$

想一想 怎樣才能把 $(*)$ 用在 $\dfrac{1}{1+\cos x}$ 上？

由於 $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$，代入 $u = \frac{1}{2}\pi - x$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$；當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時，$u = \frac{1}{4}\pi$；當 $x = \frac{1}{3}\pi$ 時，$u = \frac{1}{6}\pi$。於是

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u &= \Big[\tan u - \sec u\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= (1-\sqrt{2}) - \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

這裏用了 $\tan\frac{1}{6}\pi = 1/\sqrt{3}$ 及 $\sec\frac{1}{6}\pi = 2/\sqrt{3}$。區間長度為 $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$，所以

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\sec x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \Big(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

（同樣地，也可以把 $\frac{1}{1+\cos x}$ 乘以 $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$，得到 $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x$，其原函數（antiderivative）為 $\operatorname{cosec} x - \cot x = \tan\frac{1}{2}x$；由於 $\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2}-1$，這會得出相同的答案。）

第三個積分

現在把分子和分母同乘以 $(1-\sin x)^2$，使分母變成 $\cos^4 x$：

$$\frac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}.$$

對於第一部分，在分子中寫 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$：

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \sec^2 x + 2\tan^2 x \sec^2 x.$$

想一想 $\tan^2 x \sec^2 x$ 和 $\sin x / \cos^4 x$ 的積分分別是甚麼？

兩者都是 $f(x)^n f'(x)$ 的形式。取 $f = \tan x$，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^3 x = 3\tan^2 x \sec^2 x$；取 $f = \cos x$，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-3} = 3\sin x\,(\cos x)^{-4}$。因此

$$\int \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x + \tfrac{2}{3}\tan^3 x - \tfrac{2}{3}\sec^3 x + C.$$

當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時：$\tan = 1$ 而 $\sec^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$，得 $1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$。當 $x = 0$ 時：$0 + 0 - \frac{2}{3}$。所以

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7-4\sqrt{2}}{3}.$$

驗算

- 大小：在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，第一個被積函數（integrand）由 1 遞減至 $2-\sqrt{2} \approx 0.59$，所以積分值介乎 0.46 與 0.79 之間；$2-\sqrt{2} \approx 0.586$ 符合。同樣，第三個被積函數是第一個的平方，所以其積分應該較小：$(7-4\sqrt{2})/3 \approx 0.448$。
- 把你的原函數求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x - \sec x) = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$。
- 辛普森法則（Simpson's rule）給出三個積分的值為 0.585786、0.098663 及 0.447715，與 $2-\sqrt{2}$、$\frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 及 $\frac{1}{3}(7-4\sqrt{2})$ 準確至十位小數。

常見錯誤

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x$ 或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^3 x$ 的正負號出錯：兩者都帶正號，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-n} = n\sin x(\cos x)^{-n-1}$。
- 在第一和第三個積分中忘記下限：$\sec 0 = 1$，不是 0。
- 代換 $u = \frac{1}{2}\pi - x$ 後錯誤地對調上下限：$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ 中的負號正是用來把上下限調回遞增次序的。

STEP 之外

乘以「共軛」（conjugate）這個技巧，其實是一個系統方法的特例：代換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 能把任何 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數（rational function）變成 t 的有理函數，然後便可用部分分式（partial fractions）求積分。（我們得到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ 的答案是 $\tan\frac{1}{2}x$，正好透露了這一點。）大學一年級的分析（analysis）課程還會探討這類積分在甚麼情況下才存在，例如在 $x = -\frac{1}{2}\pi$ 附近，$1+\sin x$ 等於零。關於這兩個概念，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）；如想做更多同類風格的積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。