詳細解答

STEP I 2019，第 2 題

純數學 • 參數曲線的切線

STEP I 2019，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

這個參數化（parametrisation）的設計，使參數 t 處的斜率（gradient）恰好就是 t，因此每條切線（tangent line）的方程都非常簡潔。要找兩條切線的交點，只需把立方差（difference of cubes）因式分解（factorise）；而垂直（perpendicular）條件 $pq = -1$ 讓我們可以把所有式子改寫成以和 $p + q$ 表示。至於兩條曲線的公共點，把其中一個參數化代入另一條曲線，會得到一個帶有重根（repeated root）的多項式（polynomial），而這個重根正透露了某種幾何信息。

解答

切線

設 $x = 3t^2$ 及 $y = 2t^3$，則

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{6t^2}{6t} = t \qquad (t \neq 0).$$

所以在 $(3p^2, 2p^3)$ 處的切線斜率為 p，方程為

$$y - 2p^3 = p\,(x - 3p^2) \quad \Longrightarrow \quad y = px - 3p^3 + 2p^3 = px - p^3,$$

與所求相符。（當 $p = 0$ 時，該點是原點，是一個尖點（cusp）；在該處曲線為 $y = \pm 2(x/3)^{3/2}$，它與 x 軸 $y = 0$ 相切，所以公式仍然成立。）

兩條切線的交點

當 $p \neq q$ 時，切線 $y = px - p^3$ 與 $y = qx - q^3$ 的交點滿足

$$(p-q)\,x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

由於 $p \neq q$，可以兩邊除以 $p-q$，得 $x = p^2+pq+q^2$，於是

$$y = px - p^3 = p^3 + p^2q + pq^2 - p^3 = pq(p+q).$$

所以兩條切線相交於

$$(p^2+pq+q^2,\ pq(p+q)).$$

兩條切線的斜率分別為 p 和 q，所以它們互相垂直當且僅當 $pq = -1$。設 $u = p+q$，則 $p^2+pq+q^2 = (p+q)^2 - pq = u^2+1$，且 $pq(p+q) = -u$。因此兩條互相垂直的切線相交於 $(u^2+1,\ -u)$，與所求相符。

想一想 $\widetilde{C}$ 上的每一點，是否真的都來自一對互相垂直的切線？

是的：對任意實數 u，我們需要 $p+q = u$ 及 $pq = -1$，所以 p 和 q 是 $z^2 - uz - 1 = 0$ 的根。其判別式（discriminant）u^2+4 恆為正，所以總有兩個相異實根。因此 $\widetilde{C}$ 恰好就是所有可以向 C 作兩條互相垂直切線的點所組成的集合。

兩條曲線的公共點

消去參數後，$\widetilde{C}$ 是拋物線（parabola）$x = y^2+1$。C 上的點 $(3t^2, 2t^3)$ 位於其上當且僅當

$$3t^2 = 4t^6 + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4s^3 - 3s + 1 = 0, \quad \text{其中} s = t^2.$$

由於 $s = -1$ 是一個根，可以因式分解：

$$4s^3 - 3s + 1 = (s+1)(4s^2 - 4s + 1) = (s+1)(2s-1)^2.$$

因為 $s = t^2 \geq 0$，唯一可能是 $s = \frac{1}{2}$，所以 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。於是 $x = 3t^2 = \frac{3}{2}$，$y = 2t^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。公共點為

$$\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad\text{及}\quad \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

想一想 重複因式 $(2s-1)^2$ 告訴了我們甚麼？

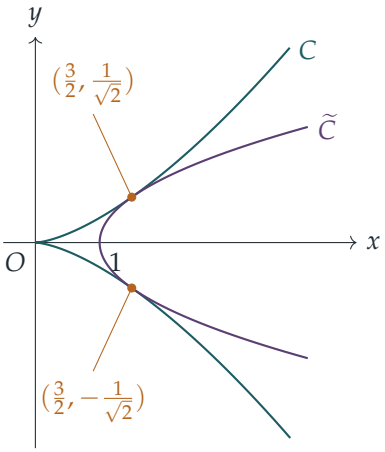
重根通常意味着相切（tangency），這裏正是如此。在 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 處，C 的斜率為 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$。在 $\widetilde{C}$ 上，由 $x = y^2+1$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，數值相同。由對稱性，下方那一點亦然。所以兩條曲線在這兩點都只是相切，而不是相交穿過。

草圖

從 C 消去 t，得 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$，其中 $x \geq 0$。這是一條半立方拋物線(semicubical parabola)，關於 x 軸對稱，在原點有一個指向左方的尖點。$\widetilde{C}$ 是拋物線 $y^2 = x - 1$，頂點（vertex）為 $(1, 0)$，開口向右。要判斷哪條曲線在外，可比較 $x \geq 1$ 時兩者 y^2 的值：

$$f(x) = \tfrac{4}{27}x^3 - (x-1), \qquad f'(x) = \tfrac{4}{9}x^2 - 1,$$

所以 f 在 $x \geq 1$ 上的最小值出現在 $x = \frac{3}{2}$，此時 $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。因此 $f(x) \geq 0$，且等號只在 $x = \frac{3}{2}$ 時成立。所以 $\widetilde{C}$ 位於 C 的內側（較接近 x 軸），並在兩個公共點與 C 相切。



驗算

- 取 $p = 1$，$q = -1$（於是 $pq = -1$，$u = 0$）。切線為 $y = x - 1$ 及 $y = -x + 1$，兩者互相垂直，相交於 $(1, 0)$，即 $\widetilde{C}$ 的頂點，與 $(u^2 + 1, -u)$ 的預測一致。
- 取 $p = 2$，$q = -\frac{1}{2}$，於是 $u = \frac{3}{2}$。切線 $y = 2x - 8$ 與 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ 的交點滿足 $\frac{5}{2}x = \frac{65}{8}$，所以 $x = \frac{13}{4} = u^2 + 1$，$y = -\frac{3}{2} = -u$。
- 點 $(1.5, 0.7071)$ 同時滿足 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$（因為 $\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{2}$）及 $y^2 = x - 1$。電腦驗算亦確認 $3t^2 - 4t^6 - 1$ 從不大於零，所以沒有其他公共點。

常見錯誤

- 忘記 $s = t^2$ 不可能是負數，而嘗試使用根 $s = -1$。
- 把拋物線畫成在公共點穿過 C，而不是在該處與 C 相切。

STEP 之外

曲線 $\widetilde{C}$ 是 C 的正交切線軌跡（orthoptic）：即所有可以向 C 作兩條互相垂直切線的點的軌跡（locus）；對拋物線而言，它就是準線（directrix）。以一族切線來描述曲線，會引出包絡線（envelope）以及射影幾何（projective geometry）中的對偶（duality）概念。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題解》）收錄了更多這類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。