詳細解答

STEP I 2019，第 11 題

概率與統計 • 幾何分佈

STEP I 2019，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.9 節用不公平的硬幣作公平的決定中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/von-neumann.html

關鍵思路

兩人程序的每一輪都是一次獨立（independent）試驗，要麼作出決定，要麼不作出決定，因此作出決定的輪次服從幾何分佈（geometric distribution）。題目中「無論 p 取何值」這個界限，歸結為在 $p+q=1$ 的條件下 pq 最大可以是多少，而算術–幾何平均不等式（AM–GM inequality）正好回答了這個問題。在第 (ii) 部分，第二輪不再是重新開始，所以我們按第一輪的結果分情況討論，再用同一個關於 pq 的界限完成證明。

解答

第 (i) 部分

在任何一輪中，兩枚硬幣是獨立的。當兩枚都是正面（概率 p^2）或兩枚都是反面（概率 q^2）時便作出決定，所以

$$\mathrm{P}(\text{在某一輪作出決定}) = p^2 + q^2, \qquad \mathrm{P}(\text{未作出決定}) = pq + qp = 2pq.$$

驗證一下：$p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = 1$。

由於每一輪都重新擲硬幣，各輪之間是獨立的。在第 n 輪作出決定，即是先有 $n-1$ 輪未作出決定，接着有一輪作出決定，所以

$$\mathrm{P}(\text{作出決定的輪次為}n) = (2qp)^{n-1}(q^2 + p^2),$$

這就是所求的結果。

至於第二個結果，用補事件（complement）最為簡便。在第 n 輪或之前仍未作出決定，即是連續 n 輪都未作出決定，其概率為 $(2pq)^n$。因此

$$\mathrm{P}(\text{作出決定的輪次不遲於}n) = 1 - (2pq)^n.$$

（利用 $p^2 + q^2 = 1 - 2pq$，把幾何級數（geometric series）$\sum_{r=1}^{n}(p^2+q^2)(2pq)^{r-1}$ 求和，也會得到相同結果。）

現在我們需要一個對所有 p 都成立的 pq 上界（upper bound）。由於 $p, q \geq 0$，算術–幾何平均不等式給出

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad pq \leq \frac{1}{4},$$

等號成立當且僅當 $p = q = \frac{1}{2}$。（等價地，$pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2$。）因此 $0 \leq 2pq \leq \frac{1}{2}$，所以 $(2pq)^n \leq \frac{1}{2^n}$，從而

$$\mathrm{P}(\text{作出決定的輪次不遲於}n) = 1 - (2pq)^n \geq 1 - \frac{1}{2^n}$$

對 p 的每一個值都成立，正如所求。公平硬幣是最差的情況。

第 (ii) 部分

設 D_1 為在第 1 輪作出決定的事件，D_2 為在第 2 輪作出決定的事件。由於這兩個事件互斥（mutually exclusive），我們需要求的是 $\mathrm{P}(D_1) + \mathrm{P}(D_2)$。

第 1 輪。三枚全是正面或全是反面：$\mathrm{P}(D_1) = p^3 + q^3$。

第 2 輪。若第 1 輪未作出決定，則硬幣顯示的是兩正一反，或兩反一正。

- **兩正一反**（概率 $3p^2q$，因為三人中任何一人都可以是擲出反面的那位）。擲出正面的兩人再擲一次，第三人則把反面的硬幣翻轉成正面。此時不可能全是反面，而全是正面當且僅當兩次新的投擲都是正面，概率為 p^2。這種情況貢獻 $3p^2q \cdot p^2 = 3p^4q$。
- **兩反一正**（概率 $3pq^2$）。同理，第三枚硬幣此時顯示反面，我們需要兩次新的投擲都是反面，概率為 q^2。這種情況貢獻 $3pq^2 \cdot q^2 = 3pq^4$。

第 2 輪的投擲與第 1 輪獨立，所以可以把概率相乘。於是

$$\mathrm{P}(D_2) = 3p^4q + 3pq^4 = 3pq\,(p^3 + q^3).$$

想一想 有沒有簡潔的方法整理 $p^3 + q^3 + 3pq(p^3 + q^3)$？

先抽出公因式 $p^3 + q^3$，再利用立方和公式及 $p + q = 1$：

$$p^3 + q^3 = (p+q)(p^2 - pq + q^2) = (p+q)^2 - 3pq = 1 - 3pq.$$

因此

$$\begin{aligned}\text{P(作出決定的輪次不遲於 2)} &= (p^3+q^3)(1+3pq)\\ &= (1-3pq)(1+3pq)\\ &= 1-9p^2q^2.\end{aligned}$$

由第 (i) 部分，$0 \le pq \le \frac{1}{4}$，所以 $p^2q^2 \le \frac{1}{16}$，從而

$$\text{P(作出決定的輪次不遲於 2)} \ge 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

無論 p 取何值都成立，且當 $p=\frac{1}{2}$ 時等號成立。證明完畢。

驗算

- 當 $p=1$（兩面都是正面的硬幣）時，立即作出決定。在第 (i) 部分，$1-(2pq)^n = 1$；在第 (ii) 部分，$1-9p^2q^2=1$，與預期相符。
- 在第 (ii) 部分取 $p=\frac{1}{2}$：第 1 輪作出決定的概率為 $\frac{1}{4}$。否則（概率 $\frac{3}{4}$）第 2 輪作出決定的概率為 $\frac{1}{4}$，得 $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$，所以這個界限是可以達到的。
- 取 $p=0.3$，公式給出 $1-9(0.21)^2 = 0.6031$。用電腦模擬三人程序 200 000 次，得到 0.602。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分第 1 輪中，忘記乘上表示誰是與眾不同那一位的因子 3。
- 把第 (ii) 部分的第 2 輪當作全新的三枚硬幣一輪來處理。被翻轉的硬幣已經固定，所以「全是正面」和「全是反面」只有其中一個可能發生。
- 只在 $p=\frac{1}{2}$ 時證明這個界限。你需要對每一個 p 都有 $pq \le \frac{1}{4}$，而算術–幾何平均不等式這類不等式正好給你這個結果。

STEP 之外

第 (i) 部分是一個經典技巧，通常歸功於馮·諾伊曼（von Neumann），用來從一枚有偏差的硬幣得出公平的決定。在兩人程序中，只有當 $p=\frac{1}{2}$ 時，「酒店」和「茶室」的可能性才相等；但如果由一人擲兩次，並以 HT 和 TH 作為結果，那麼對每一個 p 結果都是公平的。作出決定前所需的輪數是一個幾何隨機變量（geometric random variable），而關於這類程序多快停止的問題，引出了停時（stopping times）和馬可夫鏈（Markov

chains）的研究。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對兩者都有介紹。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。