詳細解答

STEP I 2019，第 10 題

力學 • 拋體運動

STEP I 2019，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

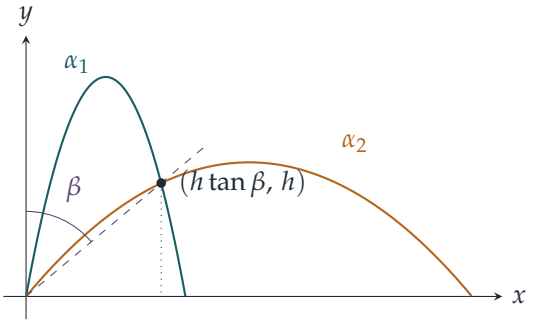
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

先寫出以 x 表示 y 的軌跡方程（trajectory equation），代入那個定點，然後留意 $1/\sin^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ 可把方程化為關於 $c = \cot\alpha$ 的二次方程（quadratic）。之後，(i) 的一切都只是二次方程的代數：根之和與根之積（sum and product of roots）配合 cot 的和角公式（addition formula）就能得出 $\alpha_1 + \alpha_2$，而「兩個相異的根」則是一個判別式（discriminant）條件。第 (ii) 部分只需用一行能量論證（或 $v^2 = u^2 + 2as$）便可完成。

解答

把粒子視為在重力作用下自由運動的質點（point mass），不計空氣阻力。角 α 從向上的鉛垂線量起，因此初速度的水平分量為 $u\sin\alpha$，鉛垂分量為 $u\cos\alpha$。



上圖顯示經過該點的兩條可能軌跡（以 $\beta = 50°$、$k = 8$ 繪製）。該點位於經過 O、與鉛垂線成 β 角的直線上。

第 (i) 部分

在時間 t，

$$x = ut\sin\alpha, \qquad y = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由於 $0 < \beta < 90°$，該點的 $x > 0$，所以 $\sin\alpha \neq 0$，於是可以消去 $t = x/(u\sin\alpha)$：

$$y = x\cot\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\sin^2\alpha} = cx - \frac{gx^2}{2u^2}(1+c^2),$$

這裏用了 $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$。現在代入 $x = h\tan\beta$、$y = h$，並除以 $h > 0$：

$$1 = c\tan\beta - \frac{gh}{2u^2}\tan^2\beta\,(1+c^2) = c\tan\beta - \frac{\tan^2\beta}{k}(1+c^2).$$

兩邊乘以 $k\cot^2\beta$，得 $k\cot^2\beta = ck\cot\beta - 1 - c^2$，即

$$c^2 - ck\cot\beta + 1 + k\cot^2\beta = 0, \qquad (*)$$

此即所求。

(a) 兩個值 $c_1 = \cot\alpha_1$ 和 $c_2 = \cot\alpha_2$ 就是關於 c 的二次方程 $(*)$ 的兩個根。（它們相異，因為 cot 在 $(0,\pi)$ 上是一一對應（one-to-one）的。）因此，由根之和與根之積，

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 = k\cot\beta, \qquad \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1 + k\cot^2\beta.$$

第一式就是第一個結果。至於第二個結果，利用 cot 的和角公式：

$$\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{k\cot^2\beta}{k\cot\beta} = \cot\beta.$$

想一想 $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ 真的能推出 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ 嗎？

單靠這一點並不能：cot 的週期（period）是 180°，所以我們還需要確定 $\alpha_1+\alpha_2$ 的範圍。這裏根之和 $k\cot\beta$ 與根之積 $1 + k\cot^2\beta$ 都是正數（因為 $k > 0$ 且 $\cot\beta > 0$），所以兩個根 c_1, c_2 都是正數。因此兩個角都是銳角，$0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 180°$，而 cot 在這個區間上是一一對應的。由於 β 也在這個區間內，所以 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。

(b) 要有兩個相異的實數值 c，$(*)$ 的判別式必須為正：

$$k^2\cot^2\beta - 4(1 + k\cot^2\beta) > 0.$$

兩邊乘以 $\tan^2\beta > 0$，

$$k^2 - 4k - 4\tan^2\beta > 0.$$

左邊關於 k 的二次式的根為 $k = 2 \pm \sqrt{4 + 4\tan^2\beta} = 2 \pm 2\sec\beta$（利用 $1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ 及 $\sec\beta > 0$），所以不等式成立當且僅當 $k < 2 - 2\sec\beta$ 或 $k > 2 + 2\sec\beta$。但 $\sec\beta > 1$，所以 $2 - 2\sec\beta < 0 < k$，第一種情況不可能出現。因此

$$k > 2(1 + \sec\beta).$$

第 (ii) 部分

粒子必須升到高度 $h > 0$，所以其初始鉛垂速度 $u\cos\alpha$ 為正。在鉛垂方向上，運動的加速度恆為 $-g$，而在最高點時鉛垂速度為零，所以由 $v^2 = u^2 + 2as$，最大高度為

$$H = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}.$$

粒子經過高度為 h 的一點，所以 $H \geq h$：

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \geq h \quad\Longrightarrow\quad \frac{2u^2}{gh}\cos^2\alpha \geq 4 \quad\Longrightarrow\quad k \geq 4\sec^2\alpha,$$

其中先乘以 $4/(gh) > 0$，再除以 $\cos^2\alpha > 0$。等號成立當且僅當點 $(h\tan\beta, h)$ 正是軌跡的最高點。

驗算

- 取 $\beta = 50°$、$k = 8$。此時 $2(1+\sec 50°) \approx 5.11 < 8$，所以存在兩個角；解 $(*)$ 得 $\alpha_1 \approx 10.29°$ 及 $\alpha_2 \approx 39.71°$，兩者之和為 $50°$。以數值方法逐步推進運動，兩條軌跡在 $x = h\tan\beta$ 處都達到高度 $1.0000\,h$。
- 對這兩個角，$k\cos^2\alpha \approx 7.74$ 及 4.73，都不小於 4，符合 (ii) 的要求。
- 以電腦對數千組隨機的 β、h、k 進行檢驗，證實 $(*)$ 有兩個相異根當且僅當 $k > 2(1+\sec\beta)$，並且每次都有 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。
- 單位：$u^2/(gh)$ 是無量綱（dimensionless）的，正如 k 應有的那樣。

常見錯誤

- 出於習慣，從水平線量度 α：本題中水平分量是 $u\sin\alpha$，而不是 $u\cos\alpha$。
- 未證明兩個角都是銳角，便由 $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ 得出 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。
- 在 (b) 中保留了負數的根 $k < 2 - 2\sec\beta$。

STEP 之外

結果 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ 說明兩個發射方向關於鉛垂線與目標連線之間的角平分線（bisector）對稱，這是關於「安全拋物線」(parabola of safety) 的一個經典事實：安全拋物線是所有速率為 u 的軌跡的包絡線 (envelope)，對應於兩根重合的臨界情況 $k = 2(1+\sec\beta)$。曲線族的包絡線是大學一年級一個連繫微積分與幾何的有趣課題。如想閱讀更多同類風格的力學，可參考 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。