詳細解答

STEP I 2019，第 1 題

純數學 • 三角函數的最優化

> **STEP I 2019，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

一切都取決於直線與兩軸的交點。求周界（perimeter）時，定點 $P=(1,k)$ 把斜邊（hypotenuse）XY 分成兩段，每段都是一個小直角三角形（right-angled triangle）的斜邊，而且該小三角形有一條邊的長度已知，所以根本不必展開任何平方根。求最小值時，面積是兩項之和，而這兩項的積是常數（正是算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality）的典型情況）；至於周界的導數（derivative），只要利用 $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$，便會漂亮地化簡。

解答

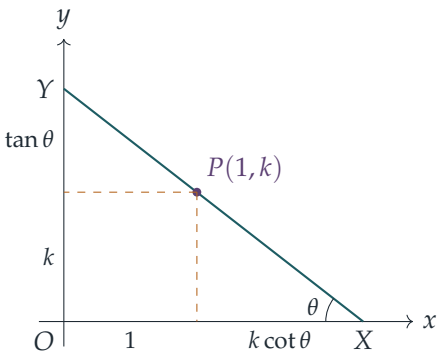
經過 $(1,k)$ 而斜率（gradient）為 $-\tan\theta$ 的直線是

$$y-k=-\tan\theta\,(x-1).$$

代入 $y=0$ 得 $x-1=k\cot\theta$；代入 $x=0$ 得 $y=k+\tan\theta$，所以

$$X=(1+k\cot\theta,\,0),\qquad Y=(0,\,k+\tan\theta).$$

由於 $k>0$ 且 $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$，兩個截距（intercept）都是正數，因此 OXY 確實是第一象限內的一個直角三角形，而 $P=(1,k)$ 位於其斜邊上。



第 (i) 部分

三角形在 O 處是直角，所以

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}(1+k\cot\theta)(k+\tan\theta) = \tfrac{1}{2}\big(k+\tan\theta+k^2\cot\theta+k\big) \\ &= k+\tfrac{1}{2}\big(\tan\theta+k^2\cot\theta\big), \end{aligned}$$

這裏用了 $\cot\theta\tan\theta=1$。

求最小值時，$\tan\theta$ 與 $k^2\cot\theta$ 均為正數，而且兩者之積是常數 k^2。由算術－幾何平均不等式，

$$\tan\theta+k^2\cot\theta \geq 2\sqrt{\tan\theta\cdot k^2\cot\theta} = 2k,$$

等號成立當且僅當 $\tan\theta = k^2\cot\theta$，即 $\tan\theta = k$（由於 $k>0$，範圍內必有某個 θ 達到此值）。因此 $A \geq k+k = 2k$，而

$$A_{\min} = 2k.$$

（用微分亦得同樣結果：$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - k^2\operatorname{cosec}^2\theta) = 0$ 當 $\tan^2\theta = k^2$。）取最小值時 $X=(2,0)$、$Y=(0,2k)$，所以 P 是 XY 的中點。

第 (ii) 部分

兩條直角邊分別是 $OX = 1+k\cot\theta$ 和 $OY = k+\tan\theta$。至於斜邊，按圖在 P 處把它分開。

- 由 P 到 Y：水平距離是 1，而直線與水平方向成 θ 角，所以 $PY = 1/\cos\theta = \sec\theta$。
- 由 P 到 X：鉛垂距離是 k，所以 $PX = k/\sin\theta = k\operatorname{cosec}\theta$。

把四段長度相加，

$$L = 1+\tan\theta+\sec\theta+k\big(1+\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta\big),$$

正如所求。

想一想 導數中含有 $\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta$。在令它等於零之前，有沒有辦法把它大大化簡？

有的。逐項微分，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta - k\left(\operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}\theta\cot\theta\right) = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} - k\,\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

由於 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$、$\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$，而 $1+\sin\theta$ 和 $1+\cos\theta$ 都不為零，所以可以約去：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{k}{1-\cos\theta}.$$

它等於零當且僅當 $1-\cos\theta = k(1-\sin\theta)$。所以最小值出現在 $\theta = \alpha$，其中

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = k,$$

這正是要證明的。（事實上這是唯一的駐點（stationary point），而且是最小值：當 θ 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增時，$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ 的第一項遞增，第二項遞減，所以 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ 是遞增的，並且只會由負轉正一次。）

想一想 怎樣才能把最小值中的 k 消去？

把 L 的各項分組並通分：

$$1+\tan\alpha+\sec\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}, \qquad 1+\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

記 $s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$，且 $k = \dfrac{1-c}{1-s}$，則第二部分變成

$$k\,\frac{1+s+c}{s} = \frac{(1+s+c)(1-c)}{s(1-s)} = \frac{1+s-sc-c^2}{s(1-s)} = \frac{s^2+s-sc}{s(1-s)} = \frac{1+s-c}{1-s},$$

這裏用了 $1-c^2 = s^2$。因此

$$\begin{aligned} L_{\min} = \frac{1+s+c}{c} + \frac{1+s-c}{1-s} &= \frac{(1+s+c)(1-s)+c(1+s-c)}{c(1-s)} \\ &= \frac{1-s^2+c-sc+c+sc-c^2}{c(1-s)} \\ &= \frac{2c}{c(1-s)}, \end{aligned}$$

因為 $1-s^2-c^2 = 0$。所以

$$L_{\min} = \frac{2}{1-\sin\alpha}.$$

驗算

取 $k = 1$。此時 $\tan\theta = 1$ 給出 $X = (2,0)$、$Y = (0,2)$ 及 $A = 2 = 2k$，與預測相符。周界的條件 $(1-\cos\alpha)/(1-\sin\alpha) = 1$ 給出 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$，而 $2/(1-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4+2\sqrt{2} \approx 6.828$，恰好等於頂點為 $(0,0)$、$(2,0)$、$(0,2)$ 的三角形的周界 $2+2+2\sqrt{2}$。對於其他一系列 k 值，用電腦對 θ 進行搜索，亦證實了兩個最小值以及周界最小值出現的位置。

常見錯誤

- 求斜邊時去展開 $\sqrt{(1+k\cot\theta)^2+(k+\tan\theta)^2}$，而不是在 P 處把它分開。
- 直接令未化簡的導數等於零，結果迷失在算式中；應先約去 $1+\sin\theta$ 和 $1+\cos\theta$。
- 最終答案中仍保留 k：題目要求只用 α 表示最小值。

STEP 之外

這個簡潔的答案背後有一個幾何解釋。經過 P 而使周界最小的直線，正是在 P 處與一個同時和兩軸相切的圓（OXY 的一個旁切圓（excircle））相切的那條直線；此時周界等於由 O 到該圓的切線長的兩倍。這個圓經過 P，半徑為 r，且 $r = 1/(1-\sin\alpha)$。帶有「直線經過 P」這類約束條件的最優化（optimisation）問題，正是大學一年級微積分課程中拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers）的起點。想看更多同類問題，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。