詳細解答

STEP III 2018，第 9 題

力學 • 碰撞與遞推關係

> **STEP III 2018，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q9

關鍵思路

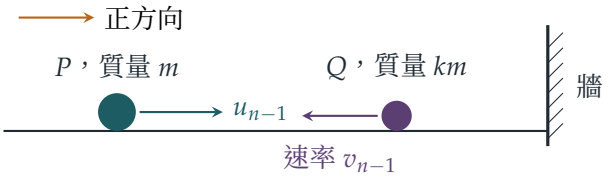
P 與 Q 每次碰撞（collision）都給出兩條線性方程：一條來自動量守恆（conservation of momentum），一條來自牛頓碰撞定律（Newton's law of restitution），把碰撞前後的速度聯繫起來。牆壁只是把 Q 的速度反向，因此某次碰撞前的狀態完全由上一次碰撞後的狀態決定。這樣便得到一對關於 u_n 和 v_n 的一階遞推關係（first-order recurrence），消去 v 後就剩下一條關於 u_n 的二階遞推關係（second-order recurrence）。第 (ii) 部分就是常規工作：把線性遞推關係的解配合其首兩項。

解答

我們把 P 和 Q 視為在光滑（smooth）地面上沿同一直線運動的質點（particle），因此兩次碰撞之間沒有水平力作用，每個質點都保持等速。全程取朝向牆壁的方向為正方向。

兩次碰撞之間發生甚麼。 第 n 次碰撞後，Q 的速度為 v_n（朝向牆壁，因為它接着會撞牆）。與牆的碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的，所以 Q 以速度 $-v_n$ 反彈回來，而 P 的速度仍是 u_n。因此在第 $n+1$ 次碰撞前一刻，速度分別為 u_n（P 的）和 $-v_n$（Q 的）。

只要正確理解 v_0，這對第一次碰撞同樣成立：碰撞前，Q 以速率 v_0 離開牆壁運動，所以其速度為 $-v_0$，正好是上述模式在 $n = 0$ 時的情況。



第 (i) 部分

對第 n 次碰撞（$n \geq 1$），由動量守恆（兩邊除以 m）得

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = u_n + kv_n. \tag{1}$$

接近速率（speed of approach）為 $u_{n-1} - (-v_{n-1}) = u_{n-1} + v_{n-1}$。碰撞後，較接近牆壁的 Q 朝牆運動得比 P 快，所以分離速率（speed of separation）為 $v_n - u_n$。由牛頓碰撞定律得

$$v_n - u_n = e\,(u_{n-1} + v_{n-1}). \tag{2}$$

把 (2) 中的 v_n 代入 (1)：

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = (1+k)u_n + ke\,(u_{n-1} + v_{n-1}),$$

所以

$$k(1+e)\,v_{n-1} = (1-ke)\,u_{n-1} - (1+k)\,u_n \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

這條式把每個 v 以兩個相鄰的 u 表示，正是消去 v 所需要的。

? **想一想** 方程 (3) 消去了 v_{n-1}，但 (2) 還含有 v_n。該怎樣處理？

方程 (3) 對所有 $n \geq 1$ 成立，所以我們也可以用 $n+1$ 代替 n：

$$k(1+e)\,v_n = (1-ke)\,u_n - (1+k)\,u_{n+1}.$$

現在把 (2) 乘以 $k(1+e)$，並利用這兩條式替換 $k(1+e)v_n$ 和 $k(1+e)v_{n-1}$：

$$(1-ke)u_n - (1+k)u_{n+1} - k(1+e)u_n = ke(1+e)\,u_{n-1} + e[(1-ke)u_{n-1} - (1+k)u_n].$$

整理各項。右邊 u_{n-1} 的係數為 $ke + ke^2 + e - ke^2 = e(1+k)$。把 u_n 的項移到左邊，其係數為

$$1 - ke - k - ke + e + ke = 1 - k + e - ke = (1+e)(1-k).$$

因此

$$(1+k)u_{n+1} - (1-k)(1+e)u_n + e(1+k)u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1),$$

再以 $n-1$ 代替 n，便得到對 $n \geq 2$ 成立的 $(*)$，即所求。

第 (ii) 部分

當 $e=\frac{1}{2}$ 及 $k=\frac{1}{34}$ 時，把 $(*)$ 乘以 68 得

$$70u_n-99u_{n-1}+35u_{n-2}=0,$$

其輔助方程（auxiliary equation）$70t^2-99t+35=(10t-7)(7t-5)=0$ 的根為 $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{5}{7}$，與題目給出的形式吻合。

要確定 A 和 B 需要兩個條件，即首兩項。我們已知 u_0。至於 u_1，在 (3) 中取 $n=1$：

$$(1+k)u_1=(1-ke)u_0-k(1+e)v_0,$$

$$\text{所以}\quad \tfrac{35}{34}u_1=\tfrac{67}{68}u_0-\tfrac{3}{68}v_0,\quad \text{得}\quad u_1=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

把 $n=0$ 和 $n=1$ 代入給定的形式，

$$A+B=u_0,\qquad \tfrac{7}{10}A+\tfrac{5}{7}B=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

把第二條方程乘以 70 得 $49A+50B=67u_0-3v_0$。減去第一條方程的 49 倍，

$$B=18u_0-3v_0,\qquad A=u_0-B=3v_0-17u_0.$$

n 很大時 u_n 的正負號。 由於 $\frac{5}{7}>\frac{7}{10}$（因為 $50>49$），B 項佔主導地位。準確地說，

$$u_n=\left(\tfrac{5}{7}\right)^n\left[B+A\left(\tfrac{49}{50}\right)^n\right],$$

而 $\left(\frac{49}{50}\right)^n\to 0$，所以括號趨於 B。若 $0<6u_0<v_0$，則 $B=3(6u_0-v_0)<0$，所以對所有足夠大的 n，括號都是負數。由於 $\left(\frac{5}{7}\right)^n>0$，當 n 很大時 u_n 為負，即所求。（具體而言，一旦 $|A|(\frac{49}{50})^n<|B|$，括號便是負數。）

從物理角度看，P 最終會被撞回、離開牆壁：Q 相對於 P 有足夠的初始速率，能不斷把它推回去，儘管 Q 輕得多。

驗算

- 取 $e=1$、$k=1$（質量相等、完全彈性）：$(*)$ 變成 $2u_n+2u_{n-2}=0$，所以 $u_n=-u_{n-2}$。事實上，質量相等的物體作彈性碰撞會互換速度，所以 $u_1=-v_0$ 及 $u_2=-v_1$；然後 Q 帶着 P 原來的速度 u_0 撞牆再折返，得 $u_2=-u_0$。
- 在 $n=0$ 時公式給出 $A+B=u_0$，在 $n=1$ 時給出

  $$\tfrac{7}{10}(3v_0-17u_0)+\tfrac{5}{7}(18u_0-3v_0)=\tfrac{1}{70}(67u_0-3v_0),$$

  正如預期。
- 取 $u_0=1$、$v_0=7$，得 $A=4$、$B=-3$。逐次計算每次碰撞，結果與公式完全吻合，而 u_n 首次變為負數是在 $n=15$，此時 $u_{15}\approx -0.00029$。

常見錯誤

- 忘記 Q 在碰撞前一刻的速度是 $-v_{n-1}$ 而不是 v_{n-1}：牆壁把它反向了。
- 在碰撞定律方程中把分離速率的正負號弄錯；碰撞後 Q 在正方向上位於 P 前面，所以分離速率是 $v_n - u_n$。
- 未從碰撞方程求出 u_1 便使用 $u_1 = \frac{7}{10}A + \frac{5}{7}B$；單靠 $(*)$ 是無法得出它的。

STEP 之外

方程 (1) 和 (2) 合起來是一個線性映射（linear map），把狀態 (u_{n-1}, v_{n-1}) 映到 (u_n, v_n)，所以整個運動就是反覆乘以一個 2×2 矩陣（matrix）。根 $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{5}{7}$ 是它的特徵值（eigenvalue），長期行為由最大的特徵值支配：這正是線性動力系統（linear dynamical systems）與差分方程（difference equations）理論的起點。想進一步了解碰撞力學，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）；至於矩陣的觀點，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數導論）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。