詳細解答

STEP III 2018，第 8 題

純數學 • 小數部分的積分

> **STEP III 2018，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q8

關鍵思路

被積函數（integrand）中最麻煩的是 x^{-1}，所以作代換（substitution）$y = 1/x$：這把 $[0,1]$ 變成 $[1,\infty)$，而後者很自然地可以分拆成一個個單位區間。如果 f 的週期（period）是 1，每個單位區間都可以平移回 $[0,1]$，剩下的有理因子就組成一個伸縮和（telescoping sum）。這樣一來，第 (ii) 部分只需看出 $\{x\}$ 和 $\{2x\}$ 的週期都是 1 便可。

解答

第 (i) 部分

設 $x = 1/y$，於是 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$；當 x 由 0 變到 1 時，y 由 ∞ 遞減至 1。此外 $1 + x = \frac{y+1}{y}$，所以

$$I = \int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{f}(y)}{(y+1)/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

把 $[1,\infty)$ 分拆成區間 $[n, n+1]$（其中 $n = 1, 2, 3, \ldots$），便得

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

正是所求。

現在假設對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+1)$，因此對每個整數 n 都有 $\mathrm{f}(x+n) = \mathrm{f}(x)$。在第 n 個積分中設 $y = x + n$，於是 x 的範圍是 $[0,1]$：

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣把無限多個這樣的積分加起來？

每個積分都有相同的 $\mathrm{f}(x)$ 和積分範圍，所以（按題目指示，不理會收斂（convergence）問題）我們可以交換求和與積分的次序，先把有理因子加起來。利用部分分式（partial fractions），

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

所以這個和會逐項相消：對固定的 $x \in [0,1]$，

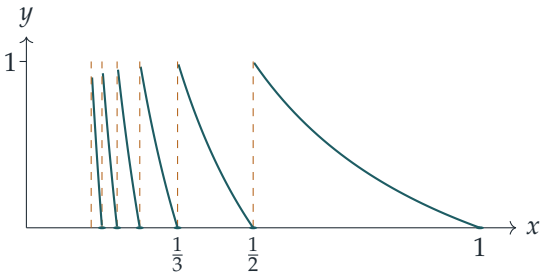
$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N+1} \longrightarrow \frac{1}{1+x} \quad \text{當} N \to \infty.$$

因此

$$I = \int_0^1 \mathrm{f}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{f}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

這就是我們想要的結果。

第 (ii) 部分



上面 $\{x^{-1}\}$ 的圖像說明了為何直接計算是行不通的：在每個區間 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 上，它等於 $\frac{1}{x} - n$，而這樣的片段有無限多段，越來越密地擠向 0。第 (i) 部分讓我們完全避開了這些麻煩。

第一個積分。取 $\mathrm{f}(x) = \{x\}$。把 x 加 1，$\lfloor x \rfloor$ 也會加 1，所以 $\{x+1\} = \{x\}$，即 f 的週期是 1。在 $[0,1)$ 上有 $\{x\} = x$（單一點 $x = 1$ 的函數值不影響積分）。所以由第 (i) 部分，

$$\int_0^1 \frac{\{x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 1 - \ln 2.$$

第二個積分。取 $\mathrm{f}(x) = \{2x\}$，那麼正如所需，$\mathrm{f}(x^{-1}) = \{2x^{-1}\}$。

想一想 函數 $\{2x\}$ 的週期是 $\frac{1}{2}$。我們仍然可以用第 (i) 部分嗎？

可以：任何週期為 $\frac{1}{2}$ 的函數，週期也是 1，因為 $\{2(x+1)\} = \{2x+2\} = \{2x\}$。所以第 (i) 部分適用。在 $[0, \frac{1}{2})$ 上，$2x \in [0,1)$ 而 $\{2x\} = 2x$；在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上，$2x \in [1,2)$ 而 $\{2x\} = 2x - 1$。因此

$$\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

把 $\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$ 及 $\frac{2x-1}{1+x} = 2 - \frac{3}{1+x}$ 代入，

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\ln\tfrac{3}{2},$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 3\ln\frac{2}{3/2} = 1 - 3\ln\tfrac{4}{3}.$$

兩者相加，再合併對數（logarithm）項，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &= 2 + \ln 3 - 4\ln 2 = 2 + \ln\tfrac{3}{16}.\end{aligned}$$

驗算

- 由於 $0 \le \{\cdot\} < 1$，兩個答案都應該介乎 0 與 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 \approx 0.693$ 之間。我們得到 $1 - \ln 2 \approx 0.3069$ 和 $2 + \ln\frac{3}{16} \approx 0.3260$，都很合理：小數部分（fractional part）的平均值約為 $\frac{1}{2}$，所以答案應大約是 0.693 的一半。
- 用電腦把在片段 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 上（第二個積分則用這些片段的兩半）的積分逐一加起來，取數以千計的片段，得到 0.306853 和 0.326024，與兩個答案吻合。

常見錯誤

- 代換 $y = 1/x$ 後把積分上下限弄反，又漏掉負號；其實 $\mathrm{d}x$ 帶來的負號與上下限對調正好互相抵消。
- 以為在整個 $[0,1]$ 上都有 $\{2x\} = 2x$：其實它在 $x = \frac{1}{2}$ 處下跌 1。
- 以為第 (i) 部分要求週期恰好是 1；其實任何週期為 $\frac{1}{k}$（k 為正整數）的函數，週期也是 1。

STEP 之外

我們在這裏不加說明就交換了無窮級數與積分的次序，而這正是在大學裏需要嚴格論證的那類步驟；單調收斂定理（monotone convergence theorem）和控制收斂定理（dom-

inated convergence theorem）等定理說明了何時可以安全地這樣做（在這裏，當 $f \geq 0$ 時每一項都非負，屬於容易的情況）。同樣的代換思路可以得出一些關於小數部分的著名積分，例如 $\int_0^1 \{1/x\}\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$，其中 γ 是歐拉（Euler）常數。若想嚴謹地學習極限、級數與積分，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。