詳細解答

STEP III 2018，第 7 題

純數學 • 棣美弗定理與級數

> **STEP III 2018，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q7

本題在 *Beyond STEP* 第 2.4 節 $\pi^2/6$ 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/basel.html

關鍵思路

式子 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 其實就是喬裝了的 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$，因此棣美弗定理（De Moivre's theorem）可把它的冪化為倍角。改用二項式定理（binomial theorem）展開同樣的冪，則得到一個以 $\cot^2\theta$ 為變量的多項式（polynomial），而它的根（roots）可以從 $\sin(2n+1)\theta$ 等於零的位置直接讀出。接着，韋達定理（Vieta's formula）不費吹灰之力便給出各根之和；再把 $1/\theta^2$ 夾在 $\cot^2\theta$ 與 $1+\cot^2\theta$ 之間，便能把巴塞爾（Basel）級數（series）困在兩個趨向同一極限的界之間。

解答

第 (i) 部分

由於 $\sin\theta \neq 0$，

$$\cot\theta \pm \mathrm{i} = \frac{\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}.$$

根據棣美弗定理，$(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1} = \cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta$，所以

$$\frac{(\cot\theta+\mathrm{i})^{2n+1} - (\cot\theta-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{2\mathrm{i}\,\sin^{2n+1}\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta},$$

這正是所求的恆等式（identity）。

現在改用二項式定理展開左方。記 $c = \cot\theta$ 及 $N = 2n+1$，

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} c^{N-k}\,\mathrm{i}^k\big(1-(-1)^k\big).$$

當 k 為偶數時，括號內的值是 0；當 k 為奇數時，則是 2。令 $k = 2j+1$，其中 $j = 0, 1, \ldots, n$；那麼 $\mathrm{i}^k = \mathrm{i}(-1)^j$，而 $c^{N-k} = c^{2(n-j)}$。除以 2i，並記 $x = \cot^2\theta$，得

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}x^{n-j} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n.$$

把這個多項式記作 $P(x)$。它的次數是 n，首項係數（leading coefficient）為 $2n+1 \neq 0$。取 $\theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$，其中 $m = 1, \ldots, n$。那麼 $0 < \theta_m < \frac{1}{2}\pi$，故 $\sin\theta_m \neq 0$，且 $\sin(2n+1)\theta_m = \sin m\pi = 0$。因此

$$P\big(\cot^2\theta_m\big) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

想一想 我們怎樣知道這些就是全部的解，而不只是其中一部分？

在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上，$\cot\theta$ 為正而且嚴格遞減（strictly decreasing），所以 $\cot^2\theta$ 亦嚴格遞減。角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ 全都位於這個區間內，故這 n 個數 $\cot^2\theta_m$ 互不相同。一個 n 次多項式最多只有 n 個根，所以它們恰好就是 $P(x) = 0$ 的所有解。

第 (ii) 部分

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ 的各根之和是 $-a_{n-1}/a_n$。這裏 $a_n = \binom{2n+1}{1}$，$a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$，所以

$$\sum_{m=1}^{n}\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

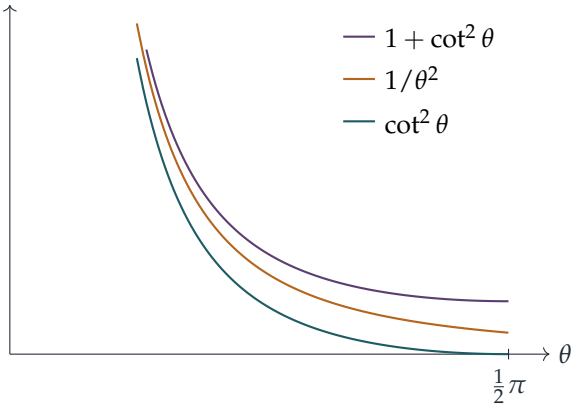
正如所求。

第 (iii) 部分

題目給出，當 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 時，$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$。三者皆為正數，所以平方後大小次序不變，而取倒數（reciprocal）則令次序倒轉：

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \text{即} \qquad \cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta,$$

這裏用了 $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$。



令 $\theta=\theta_m=\dfrac{m\pi}{2n+1}$，使得 $\dfrac{1}{\theta_m^2}=\dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{m^2}$，然後把 $m=1,\dots,n$ 的不等式相加。記 $S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}$，並利用第 (ii) 部分，得

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}S_n<n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

全式乘以 $\pi^2/(2n+1)^2>0$，得

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}<S_n<\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

把分子分母同除以 n^2，可見當 $n\to\infty$ 時兩個分數都趨向 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以兩個界都趨向 $\frac{\pi^2}{6}$。根據夾逼定理（squeeze / sandwich theorem），$S_n\to\frac{\pi^2}{6}$，即

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

驗算

- 當 $n=1$ 時，多項式是 $3x-1$，其根為 $\frac{1}{3}=\cot^2\frac{\pi}{3}$，而第 (ii) 部分的公式亦給出 $1\times1/3=\frac{1}{3}$。當 $n=2$ 時，$\cot^2\frac{\pi}{5}+\cot^2\frac{2\pi}{5}$ 應等於 2；數值上 $1.894+0.106=2.000$。
- 取 $n=50$，第 (iii) 部分的界為 $1.5964<S_{50}=1.6251<1.6448$，而 $\pi^2/6\approx1.6449$。兩個界互相逼近，這是理所當然的，因為兩者之差為 $\pi^2n/(2n+1)^2\approx\pi^2/(4n)$。

常見錯誤

- 證明了每個 $\cot^2\theta_m$ 都是根，卻忘記論證它們互不相同——正是這一點才令它們成為全部的解。
- 弄錯韋達定理中的正負號：x^{n-1} 的係數是 $-\binom{2n+1}{3}$，所以各根之和是 $+\binom{2n+1}{3}/\binom{2n+1}{1}$。

► 把不等式倒轉時沒有指出所有量皆為正數，而這正是容許平方及取倒數的前提。

STEP 之外

歐拉（Euler）在 1734 年首先求得 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$，方法是把 $\sin x/x$ 當作一個「無窮次多項式」來比較係數——與這裏所用的韋達思路相同，只是欠缺了夾逼法所提供的嚴謹性。到了大學，你會透過傅里葉級數（Fourier series）（帕塞瓦爾恆等式（Parseval's identity））再次遇見這個和，亦會以 $\zeta(2)$ 的身份遇見它，即黎曼（Riemann）ζ 函數（zeta function）的第一個值；所有 $\zeta(2k)$ 都是 π^{2k} 的有理數倍，但人們對 $\zeta(3)$ 所知甚少。若想了解極限與夾逼定理背後的分析學，可以讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。