詳細解答

STEP III 2018，第 6 題

純數學 • 複數與幾何

> **STEP III 2018，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q6

關鍵思路

一個複數（complex number）是實數，當且僅當它等於自己的共軛（conjugate），因此三點共線（collinear）的條件可以化為一條聯繫 z 與 z^* 的方程。在單位圓（unit circle）上有 $a^* = 1/a$，借此可以消去圓上各點的共軛，於是弦（chord）上任意一點 q 都滿足一條線性方程。之後每個結果，都是寫出兩條這樣的弦方程，再將它們相加或相減而得。

解答

第 (i) 部分

由於 A、Q、C 共線且 $A \neq C$，點 Q 等於 A 加上由 A 到 C 的向量的某個實數倍：對某個實數 t，有 $q - a = t(c - a)$。因為 $c \neq a$，可以相除，所以

$$\frac{q-a}{c-a} = t \quad \text{是實數。}$$

實數等於其共軛，故

$$\frac{q-a}{c-a} = \frac{q^*-a^*}{c^*-a^*},$$

其中 $c^* - a^* \neq 0$，因為 $c \neq a$。交叉相乘得 $(c-a)(q^*-a^*) = (c^*-a^*)(q-a)$，即所求。

現設 $aa^* = cc^* = 1$，於是 $a^* = 1/a$，$c^* = 1/c$。那麼

$$c^* - a^* = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac} = -\frac{c-a}{ac},$$

而上一條方程變成

$$(c-a)\left(q^* - \frac{1}{a}\right) = -\frac{c-a}{ac}(q-a).$$

兩邊除以 $c-a\neq 0$，再乘以 $-ac$，得

$$-ac\,q^*+c=q-a,\qquad \text{即}\qquad q+ac\,q^*=a+c.$$

這就是弦 AC 的方程：經過 A 和 C 的直線上每一點 q 都滿足它。

第 (ii) 部分

由於 A、B、C、D 按逆時針次序排列，AC 與 BD 是圓內接（inscribed）凸四邊形（convex quadrilateral）的兩條對角線（diagonal），因此它們相交於圓內部的一點 Q。特別地，Q 與這四點都不同，所以第 (i) 部分適用於直線 AC 和 BD：

$$q+ac\,q^*=a+c,$$
$$q+bd\,q^*=b+d.$$

第一式減去第二式，消去 q：

$$(ac-bd)\,q^*=(a+c)-(b+d). \tag{1}$$

想一想 我們已得到關於 q^* 的方程；怎樣才能得到一條關於 q 的方程與之相加？

對 (1) 取共軛，並再次利用 $a^*=1/a$ 等關係。左邊變成

$$\Big(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bd}\Big)q=\frac{bd-ac}{abcd}\,q,$$

右邊變成

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{d}=\frac{a+c}{ac}-\frac{b+d}{bd}=\frac{bd(a+c)-ac(b+d)}{abcd}.$$

兩邊乘以 $-abcd$，得

$$(ac-bd)\,q=ac(b+d)-bd(a+c). \tag{2}$$

將 (1) 與 (2) 相加，

$$(ac-bd)(q+q^*)=a+c-b-d+abc+acd-abd-bcd.$$

把右邊各項分組，

$$(a-b)+(acd-bcd)+(c-d)+(abc-abd)=(a-b)(1+cd)+(c-d)(1+ab),$$

即得所求結果。

第 (iii) 部分

直線 AB 與 CD 是內接四邊形的一對對邊，所以它們的交點 P 在圓外。因此 P 與 A、B 不同，也與 C、D 不同。對共線的三點 A、P、B 應用第 (i) 部分，得 $p + ab\,p^* = a + b$。由於 p 是實數，$p^* = p$，所以

$$p(1 + ab) = a + b.$$

同理，由 C、P、D 得

$$p(1 + cd) = c + d.$$

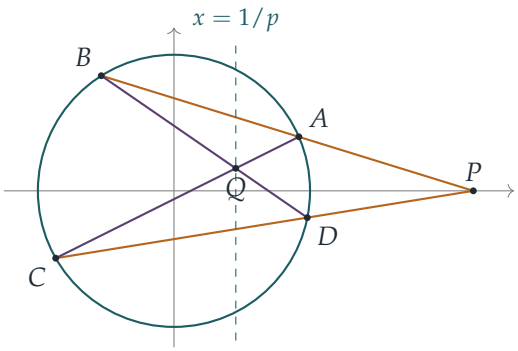
現將第 (ii) 部分的最終結果乘以 p，並代入這兩條方程：

$$\begin{aligned} p\,(ac - bd)(q + q^*) &= (a - b)\,p(1 + cd) + (c - d)\,p(1 + ab) \\ &= (a - b)(c + d) + (c - d)(a + b) \\ &= (ac + ad - bc - bd) + (ac + bc - ad - bd) \\ &= 2(ac - bd). \end{aligned}$$

由於 $ac - bd \neq 0$，可以兩邊除以它，得 $p(q + q^*) = 2$，即所求。

事實上，這裏 $ac - bd$ 不可能為零。若 $ac = bd$，則 (1) 迫使 $a + c = b + d$ 亦成立，於是 $z^2 - (a + c)z + ac$ 與 $z^2 - (b + d)z + bd$ 是同一個二次式（quadratic）。那麼 $\{a, c\} = \{b, d\}$，與各點互不相同矛盾。

由於 $q + q^* = 2\,\mathrm{Re}\,q$，這個結果說明 $\mathrm{Re}\,q = 1/p$。無論經過 P 的兩條直線怎樣選取，對角線的交點 Q 都落在固定的鉛垂線 $x = 1/p$ 上。



驗算

- 對稱情況：取 A、B 位於角度 $20°$、$70°$，C、D 位於 $-70°$、$-20°$。由關於實軸的反射對稱，P 和 Q 都是實數，而結果表明 $pq = 1$。設 $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$，由公式 $p = (a + b)/(1 + ab)$ 得 $p = \cos\frac{\alpha - \beta}{2} / \cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \cos 25° / \cos 45° \approx 1.2817$。直接求 AC 與實軸的交點作為 q：$q \approx 0.7802$，而 $pq \approx 1.0000$。

- 圖中取 $p = 2.2$。對角線相交於 $x \approx 0.4545 = 1/2.2$，與預測相符。三條恆等式亦已用電腦在數千個隨機構形上驗證。

常見錯誤

- 忘記 $ac - bd$ 取共軛後得到的是 $1/(ac) - 1/(bd)$，而不是 $ac - bd$；必須小心消去因子 $abcd$。
- 除以 $c - a$ 或 $ac - bd$ 時沒有說明它為何不為零。

STEP 之外

這裏 Q 位於 P 關於該圓的極線（polar）上：對於單位圓外、與圓心距離為 p 的點 P，其極線是垂直於 OP、與 O 距離為 $1/p$ 的直線。這是射影幾何（projective geometry）中布洛卡定理（Brocard's theorem）的一部分，而背後的映射 $P \mapsto 1/p^*$ 正是關於該圓的反演（inversion），它是複分析（complex analysis）和幾何中的重要工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）對反演及阿岡圖（Argand diagram）的幾何有精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。