詳細解答

STEP III 2018，第 5 題

純數學 • 算術幾何平均不等式

STEP III 2018，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q5

關鍵思路

這是用歸納法（induction）證明 AM–GM 不等式（算術－幾何平均不等式，AM–GM inequality），但有一個巧妙之處：我們不直接證明 $A_n \geq G_n$，而是證明每加入一個新的數，加權差距 $n(A_n - G_n)$ 都不會減少。當 $n = 1$ 時差距為零，因此它一直保持非負。λ_k 的選取使 G_{k+1} 成為 G_k 的一個簡單倍數，從而把整個比較化為一個單變量的多項式不等式（polynomial inequality）。

解答

第 (i) 部分

有兩個事實把第 k 步和第 $k+1$ 步聯繫起來。就和而言，

$$(k+1)A_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = kA_k + a_{k+1}.$$

就積而言，$G_k^k = a_1 a_2 \cdots a_k$，而由 λ_k 的定義得 $a_{k+1} = G_k \lambda_k^{k+1}$。所以

$$G_{k+1}^{k+1} = G_k^k \, a_{k+1} = G_k^k \cdot G_k \lambda_k^{k+1} = (G_k \lambda_k)^{k+1}, \qquad \text{所以} \qquad G_{k+1} = G_k \lambda_k,$$

這裏取正的 $(k+1)$ 次方根，因為 $G_k > 0$ 且 $\lambda_k > 0$。這正是 λ_k 要這樣定義的原因。

現在比較兩邊：

$$\begin{aligned}(k+1)(A_{k+1} - G_{k+1}) - k(A_k - G_k) &= kA_k + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} - kA_k + kG_k \\ &= G_k \lambda_k^{k+1} - (k+1)G_k \lambda_k + kG_k \\ &= G_k(\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k).\end{aligned}$$

由於 $G_k > 0$，左邊 ≥ 0 當且僅當括號內的式子 ≥ 0。這就是所要求的等價關係。

第 (ii) 部分

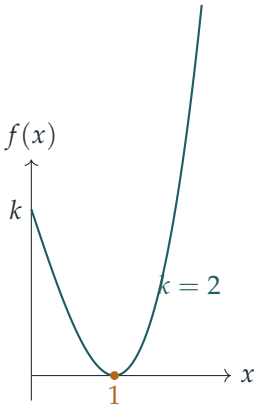
求導數（derivative），

$$f'(x) = (k+1)x^k - (k+1) = (k+1)(x^k - 1).$$

當 $0 < x < 1$ 時有 $x^k < 1$，故 $f'(x) < 0$；當 $x > 1$ 時有 $x^k > 1$，故 $f'(x) > 0$。因此 f 在 $(0, 1]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[1, \infty)$ 上嚴格遞增，它在 $x > 0$ 上的最小值是

$$f(1) = 1 - (k+1) + k = 0.$$

所以對所有 $x > 0$ 都有 $f(x) \geq 0$。此外，若 $x \neq 1$，則由 1 兩側的嚴格單調性得 $f(x) > f(1) = 0$。所以 $f(x) = 0$ 僅當 $x = 1$ 時成立，而 $f(1) = 0$ 給出逆命題。



（當 $k = 2$ 時，$f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$；在 $x = 1$ 的二重根（double root）處，圖像剛好與軸相切。）

第 (iii) 部分

對每個正整數 n，記 $d_n = n(A_n - G_n)$。

(a) 由第 (ii) 部分，取 $x = \lambda_k > 0$，得 $\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k \geq 0$，所以由第 (i) 部分

$$d_{k+1} \geq d_k \qquad \text{對每個} k \geq 1.$$

又 $A_1 = a_1 = G_1$，所以 $d_1 = 0$。因此

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n,$$

所以 $d_n \geq 0$，兩邊除以 $n > 0$，便得對所有 n 都有 $A_n \geq G_n$。

(b)

想一想 若 $A_n = G_n$，這對整條不等式鏈中較早的各步（而不只是最後一步）說明了甚麼？

若 $A_n = G_n$，則 $d_n = 0$，不等式鏈變成 $0 = d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n = 0$。一條以 0 開始並以 0 結束的非遞減鏈必然是常數，所以對每個 $k = 1, \ldots, n-1$ 都有 $d_{k+1} = d_k$。由第 (i) 部分的恆等式，這表示 $G_k f(\lambda_k) = 0$，而因為 $G_k > 0$，所以 $f(\lambda_k) = 0$。由第 (ii) 部分得 $\lambda_k = 1$，即對每個 $k = 1, \ldots, n-1$ 都有 $a_{k+1} = G_k$。

現在對 k 用歸納法論證。當 $k = 1$ 時：$a_2 = G_1 = a_1$。若 $a_1 = \cdots = a_k = a$，則 $G_k = (a^k)^{1/k} = a$，所以 $a_{k+1} = G_k = a$。因此 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，得證。

驗算

取 $a_1, a_2, a_3 = 1, 4, 16$。則 $A_2 = 2.5$，$G_2 = 2$，$A_3 = 7$，$G_3 = 4$，所以 $d_1, d_2, d_3 = 0, 1, 9$：正如所料是遞增的。這裏 $\lambda_2 = (16/2)^{1/3} = 2$，而 $G_2 f(\lambda_2) = 2(8 - 6 + 2) = 8 = d_3 - d_2$，這印證了第 (i) 部分的恆等式。用電腦在數以千計的隨機正數數列上檢驗該恆等式及 $d_{k+1} \ge d_k$，並沒有發現任何例外。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明了一個方向。把差寫成 $G_k f(\lambda_k)$ 就能同時得到兩個方向，因為 $G_k > 0$。
- 在 (iii)(b) 中只推出 $\lambda_{n-1} = 1$。你需要整條鏈的每一步都取等號，而這是由鏈從 $d_1 = 0$ 開始得出的。
- 在應用第 (ii) 部分之前忘記說明為何 $\lambda_k > 0$，而第 (ii) 部分只涵蓋 $x > 0$ 的情況。

STEP 之外

不等式 $x^{k+1} - (k+1)x + k \ge 0$ 是伯努利不等式（Bernoulli's inequality）的特例，而 AM–GM 本身則是琴生不等式（Jensen's inequality）應用於凹函數（concave function）$\ln x$ 的特例。這些凸性不等式是大學一年級分析學的基本工具。嘗試 AM–GM 的其他幾種證明，包括柯西（Cauchy）的「前進－後退」歸納法，是很好的練習；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）涵蓋了相關的分析學背景。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。