詳細解答

STEP III 2018，第 4 題

純數學 • 雙曲線的切線

> **STEP III 2018，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q4

關鍵思路

求切線最快的方法是直接用標準結果：$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 在 (x_1, y_1) 處的切線（tangent）是 $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$。之後的一切都只是兩條直線相交，所以只需解幾組一次聯立方程，再整理三角式子。在第 (ii) 部分，垂直條件是 $\sin\theta$ 與 $\sin\phi$ 之間一條涉及 b 的關係式，正正是它讓我們能把 b 從式子中消去，最後再以 $a^2 - b^2$ 的形式把它帶回來。和差化積公式（sum-to-product formulae）能令最後的代數運算變得簡短。

解答

P 點的切線

對 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 進行隱函數求導（implicit differentiation），得 $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，因此在 (x_1, y_1) 處的斜率（gradient）是 $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$，而切線為

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \iff \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

這裏用到 (x_1, y_1) 在曲線上這一事實。（這個形式同樣適用於頂點（vertex），即 $y_1 = 0$ 而切線是鉛垂線的情況。）代入 $x_1 = a\sec\theta$、$y_1 = b\tan\theta$：

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1.$$

兩邊乘以 $ab\cos\theta$（它不等於零，因為 $\sec\theta$ 存在），得

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta,$$

即所求。

第 (i) 部分

題目給出的兩條直線就是漸近線（asymptote）$y = \pm\frac{b}{a}x$。

在 S 點，$ay = bx$。把 $ay = bx$ 代入切線方程，得 $bx(1-\sin\theta) = ab\cos\theta$，所以

$$S = \left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}, \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

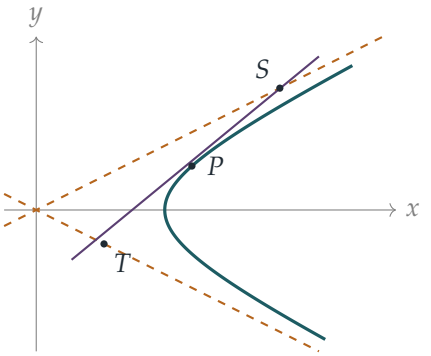
在 T 點，$ay = -bx$，得 $bx(1+\sin\theta) = ab\cos\theta$，所以

$$T = \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}, -\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

兩個分母都不為零，因為 $\cos\theta \neq 0$ 意味着 $\sin\theta \neq \pm 1$。將兩者相加，並利用 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \cos^2\theta$：

$$x_S + x_T = a\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2a}{\cos\theta} = 2a\sec\theta,$$
$$y_S + y_T = b\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2b\sin\theta}{\cos\theta} = 2b\tan\theta.$$

因此 ST 的中點（mid-point）是 $(a\sec\theta, b\tan\theta)$：**$ST$ 的中點正是 P 本身**。任一點的切線被兩條漸近線所截的線段，都在切點處被平分。



第 (ii) 部分

垂直條件。 把 P 點的切線寫成 $ay\sin\theta = bx - ab\cos\theta$，當 $\sin\theta \neq 0$ 時其斜率為 $\dfrac{b}{a\sin\theta}$。（若 $\sin\theta = 0$，切線是鉛垂線，那麼 Q 點的切線就必須是水平線；但由於 $b/(a\sin\phi) \neq 0$，沒有任何切線是水平的。所以 $\sin\theta \neq 0$，同理 $\sin\phi \neq 0$。）兩條切線互相垂直（perpendicular），需要兩斜率之積為 -1：

$$\frac{b^2}{a^2\sin\theta\sin\phi} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta\sin\phi = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{$*$}$$

特別地，$\sin\theta$ 與 $\sin\phi$ 異號，所以 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$。留意 $(*)$ 需要 $b^2/a^2 < 1$，這正是用到 $a > b$ 的地方。

交點。 點 (x, y) 滿足

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta, \qquad bx - ay\sin\phi = ab\cos\phi.$$

以第一式減去第二式，得 $ay(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\cos\theta - \cos\phi)$。把第一式乘以 $\sin\phi$、第二式乘以 $\sin\theta$，再相減，得 $bx(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta) = ab\sin(\phi - \theta)$。因此

$$x = \frac{a\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi - \sin\theta}, \qquad y = \frac{b(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin\phi - \sin\theta}.$$

想一想 這些式子仍然含有 b。怎樣才能只用 a、θ 和 ϕ 表示 x^2 和 y^2？這些分式又能否化簡？

條件 $(*)$ 表示 $b^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi$，所以取平方就能消去 b。為了化簡，設 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi+\theta)$ 及 $\beta = \frac{1}{2}(\phi-\theta)$。和差化積公式給出

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos\theta - \cos\phi = 2\sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\phi-\theta) = 2\sin\beta\cos\beta,$$

而由於 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$，所以 $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$。約去 $2\sin\beta$，

$$x = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad y = b\tan\alpha,$$

因此

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2(\frac{1}{2}(\phi-\theta))}{\cos^2(\frac{1}{2}(\phi+\theta))},$$
$$y^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi\,\tan^2(\tfrac{1}{2}(\phi+\theta)).$$

等價地，不用半角可寫成

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2(\phi-\theta)}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}, \qquad y^2 = -\frac{a^2\sin\theta\sin\phi\,(\cos\theta-\cos\phi)^2}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}.$$

圓。 我們還需要以 α 和 β 表示 $\sin\theta\sin\phi$。由於 $\theta = \alpha - \beta$ 及 $\phi = \alpha + \beta$，

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

設 $k = \sin\theta\sin\phi = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$。於是，利用 $\tan^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha$，

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[\cos^2\beta - k\,(1-\cos^2\alpha)\Big] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[(\cos^2\beta - k) + k\cos^2\alpha\Big] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[\cos^2\alpha + k\cos^2\alpha\Big] \qquad \text{因為 } \cos^2\beta - k = \cos^2\alpha \\ &= a^2(1+k) = a^2 + a^2\sin\theta\sin\phi = a^2 - b^2,\end{aligned}$$

最後一步用到 $(*)$。所以任意兩條互相垂直的切線的交點都在圓 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上，即所求。

驗算

- 取 $a=2$、$b=1$、$\theta=\frac{\pi}{6}$、$\phi=-\frac{\pi}{6}$。那麼 $\sin\theta\sin\phi=-\frac{1}{4}=-b^2/a^2$，所以兩切線互相垂直（斜率分別為 1 和 -1）。此時 $\alpha=0$、$\beta=-\frac{\pi}{6}$，所以 $x=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$、$y=0$，而 $x^2+y^2=3=a^2-b^2$。直接驗證：切線 $x-y=\sqrt{3}$ 與 $x+y=\sqrt{3}$ 的確相交於 $(\sqrt{3},0)$。
- 在第 (i) 部分，當 $\theta\to 0$ 時，切線變成鉛垂線 $x=a$，它與漸近線相交於 $(a,\pm b)$，中點為 $(a,0)=P$。
- 以上所有公式，包括 (i) 中的中點以及 $x^2+y^2=a^2-b^2$，都已用電腦對數以千計隨機選取的 $a>b>0$ 及互相垂直的 θ,ϕ 組合，直接解兩條切線方程加以確認。

常見錯誤

- 在 x^2 和 y^2 的式子中保留 b：題目要求只用 a、θ 和 ϕ 表示，所以必須用 $(*)$ 消去 b^2。
- 移項出錯，把切線斜率寫成 $-b/(a\sin\theta)$；應檢查在第一象限的點處斜率是否為正。
- 除以 $\sin\phi-\sin\theta$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的圓是雙曲線（hyperbola）的準圓（director circle）：即從該點引出的兩條切線互相垂直的點的軌跡（locus）。對於橢圓（ellipse），準圓是 $x^2+y^2=a^2+b^2$；而對於 $a<b$ 的雙曲線，則根本沒有實的準圓，這就是題目堅持 $a>b$ 的原因。第 (i) 部分的平分性質讓我們初步窺見圓錐曲線（conics）的射影幾何（projective geometry）與仿射幾何（affine geometry）；在這些理論中，切線、漸近線以及極點與極線（poles and polars）都以統一的方式處理。若想找完全同類風格的題目，可以試讀 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。