詳細解答

STEP III 2018，第 3 題

純數學 • 歐拉微分方程

> **STEP III 2018，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q3

關鍵思路

左邊是一條歐拉方程（Euler equation，又稱等維方程，equidimensional equation）：每個導數都配上相應次數的 x 冪。把嵌套形式 $(*)$ 展開並比較係數（comparing coefficients），就能確定 a、b 和 c。方程一旦寫成這個形式，便可以透過兩次簡單的積分求解，每次剝去一層導數；而分情況討論的需要，正正出現在其中一個積分是 x^{-1} 的積分、因而產生對數的時候。

解答

全題我們都在 $x > 0$ 上討論，使 x 的所有冪都有定義。

求 a、b 和 c

由乘積法則（product rule），

$$(x^c y)' = x^c y' + cx^{c-1}y, \qquad \text{所以} \qquad x^b(x^c y)' = x^{b+c}y' + cx^{b+c-1}y.$$

再求導一次，

$$(x^b(x^c y)')' = x^{b+c}y'' + (b+c)x^{b+c-1}y' + cx^{b+c-1}y' + c(b+c-1)x^{b+c-2}y.$$

乘以 x^a，並選取 $a + b + c = 2$，得

$$x^a(x^b(x^c y)')' = x^2y'' + (b+2c)\,xy' + c(b+c-1)\,y.$$

這與題目所給的左邊吻合，只要

$$b + 2c = 1 - 2p, \qquad c(b+c-1) = p^2 - q^2.$$

由第一式得 $b+c-1=-2p-c$，於是第二式變為 $-c^2-2pc=p^2-q^2$，即 $(c+p)^2=q^2$。取 $c+p=q$，

$$c=q-p,\qquad b=1-2p-2c=1-2q,\qquad a=2-b-c=1+p+q.$$

因此方程可寫成

$$x^{1+p+q}\Big(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\Big)'=\mathrm{f}(x),$$

此即所求。（另一個根 $c+p=-q$ 給出的結果只是把 q 換成 $-q$，兩者並無分別，因為方程中只出現 q^2。）

第 (i) 部分

當 $\mathrm{f}=0$ 時，我們可以除以 $x^{1+p+q}\neq 0$：

$$\Big(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\Big)'=0\quad\Longrightarrow\quad x^{1-2q}(x^{q-p}y)'=A\quad\Longrightarrow\quad (x^{q-p}y)'=Ax^{2q-1},$$

其中 A 為常數。下一次積分的做法，取決於冪 $2q-1$ 是否等於 -1。

> **想一想** 為甚麼 p 的值在這裏不會引出不同的情況？

我們要積分的指數是 $2q-1$，它與 p 無關；p 只透過因子 x^{q-p} 出現，而這個因子我們最後才除去。所以情況的劃分只取決於 q。

情況 $q\neq 0$。積分得 $x^{q-p}y=\dfrac{A}{2q}x^{2q}+B$，再乘以 x^{p-q}（並把常數 $\frac{A}{2q}$ 重新記作 A），

$$y=Ax^{p+q}+Bx^{p-q}.$$

情況 $q=0$。此時 $(x^{-p}y)'=Ax^{-1}$，所以 $x^{-p}y=A\ln x+B$，從而

$$y=x^p\,(A\ln x+B).$$

每種情況都有兩個任意常數（arbitrary constant），正如二階方程所應有的。

第 (ii) 部分

這是 $q=0$、$\mathrm{f}(x)=x^n$ 的情況，所以 $a=1+p$、$b=1$、$c=-p$，方程為

$$x^{1+p}\Big(x(x^{-p}y)'\Big)'=x^n\quad\Longleftrightarrow\quad\Big(x(x^{-p}y)'\Big)'=x^{n-p-1}.$$

第一次積分涉及 x^{n-p-1}，它恰好在 $n=p$ 時等於 x^{-1}。

情況 $n\neq p$。積分一次，

$$x(x^{-p}y)'=\frac{x^{n-p}}{n-p}+A\quad\Longrightarrow\quad(x^{-p}y)'=\frac{x^{n-p-1}}{n-p}+\frac{A}{x}.$$

由於 $n-p\neq 0$，再積分得

$$x^{-p}y=\frac{x^{n-p}}{(n-p)^2}+A\ln x+B,\qquad \text{所以}\qquad y=\frac{x^n}{(n-p)^2}+x^p\,(A\ln x+B).$$

情況 $n=p$。此時第一次積分便產生對數：

$$x(x^{-p}y)'=\ln x+A\quad\Longrightarrow\quad (x^{-p}y)'=\frac{\ln x}{x}+\frac{A}{x}.$$

由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\ln x)^2=\frac{\ln x}{x}$，

$$x^{-p}y=\tfrac{1}{2}(\ln x)^2+A\ln x+B,\qquad \text{所以}\qquad y=x^p\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2+A\ln x+B\right).$$

在兩種情況中，含 A 和 B 的部分正是第 (i) 部分中 $q=0$ 時的餘函數（complementary function），理應如此。

驗算

- 取 $p=q=0$：方程為 $x^2y''+xy'=0$，即 $(xy')'=0$，所以 $y=A\ln x+B$，與第 (i) 部分吻合。
- 在齊次方程 (homogeneous equation) 中試代 $y=x^m$：$m(m-1)+(1-2p)m+p^2-q^2=(m-p)^2-q^2$，所以 $m=p\pm q$，當 $q=0$ 時為重根（repeated root），與上面所得一致。
- 在第 (ii) 部分中取 $n=p=1$，$y=\frac{1}{2}x(\ln x)^2$ 有 $y'=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$ 及 $y''=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$，所以 $x^2y''-xy'+y=x\ln x+x-\frac{1}{2}x(\ln x)^2-x\ln x+\frac{1}{2}x(\ln x)^2=x$，此即所求。
- 所有解亦已用電腦在大量隨機的 p、q、n 和 x 值下代回方程驗證；殘差 (residual) 在捨入誤差範圍內為零（約 10^{-6}）。

常見錯誤

- 在 (i) 中遺漏 $q=0$ 的情況，或在 (ii) 中遺漏 $n=p$ 的情況；這些情況下要用 $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x=\ln x$ 代替冪法則。
- 在第一步遺漏積分常數：正是它產生第二個線性獨立的解。
- 沒有說明理由便假設 $a+b+c=2$：這是為了使 y'' 乘以 x^2 所必需的。

STEP 之外

把二階算子寫成一階算子的複合，稱為把算子因式分解（factorising），這正是降階法（reduction of order）以及量子力學中階梯算子（ladder operators）背後的想法。代換

$x = \mathrm{e}^t$ 可把任何歐拉方程變成常係數方程，這就解釋了重根 $m = p$ 以及 $\ln x$（即 t）這個因子的出現。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《基礎微分方程》）論述了歐拉方程和降階法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。