詳細解答

STEP III 2018，第 2 題

純數學 • 埃爾米特多項式

STEP III 2018，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q2

關鍵思路

把定義倒過來看：它說明 z 的 n 階導數（derivative）等於 $(-1)^n y_n z$。將這式再微分一次，並與 $n+1$ 時的同一個式子比較，一行便得出第 (i) 部分。之後，第 (i) 部分就成為我們微分遞推關係（recurrence）的工具，推動第 (ii) 部分的歸納法（induction）。最後的不等式（inequality）則由第 (ii) 部分的恆等式（identity），再用一次非常簡短的歸納法得出。

解答

全文中 $z = \mathrm{e}^{-x^2}$，故 $z' = -2xz$，而且對每個 x 都有 $z > 0$。將定義移項，得

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^n y_n z \qquad (n \geq 0),$$

由於 $y_0 = 1$，此式在 $n = 0$ 時亦成立。

第 (i) 部分

利用乘積法則（product rule）及 $z' = -2xz$，將上面列出的等式微分：

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} z}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (-1)^n (y_n' z + y_n z') = (-1)^n (y_n' - 2x y_n) z.$$

但以 $n+1$ 代替 n 的同一等式指出，左方等於 $(-1)^{n+1} y_{n+1} z$。令兩者相等，再除以永不為零的 $(-1)^n z$，得

$$y_n' - 2x y_n = -y_{n+1}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = 2x y_n - y_{n+1},$$

此即所求。以上推導並不需要 $n \geq 1$，因此結果在 $n = 0$ 時亦成立；下面會用到這一點。

留待後用：$z' = -2xz$ 及 $z'' = (4x^2 - 2)z$，故 $y_1 = 2x$ 及 $y_2 = 4x^2 - 2$。

第 (ii) 部分

基本情況。 當 $n = 1$ 時，我們需要 $y_2 = 2xy_1 - 2y_0$，而確實 $2x \cdot 2x - 2 = 4x^2 - 2 = y_2$。

歸納步驟。 假設對某個 $k \geq 1$，

$$y_{k+1} = 2xy_k - 2ky_{k-1}. \qquad (*)$$

我們想得到往後一步的同一關係，所以將 $(*)$ 微分：

$$y'_{k+1} = 2y_k + 2xy'_k - 2ky'_{k-1}.$$

? **想一想** 怎樣消去這些導數？當 $k = 1$ 時，第 (i) 部分可以用於 y_{k-1} 嗎？

利用第 (i) 部分替換每一個導數。當 $k = 1$ 時，y'_{k-1} 對應 $n = 0$ 的情況，而我們已指出這情況同樣成立。於是得

$$2xy_{k+1} - y_{k+2} = 2y_k + 2x(2xy_k - y_{k+1}) - 2k(2xy_{k-1} - y_k),$$

所以

$$y_{k+2} = 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4kx\, y_{k-1}.$$

含 y_{k-1} 的項再用一次假設 $(*)$ 消去：$2ky_{k-1} = 2xy_k - y_{k+1}$，故 $4kx\, y_{k-1} = 4x^2y_k - 2xy_{k+1}$。代入後，

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4x^2y_k - 2xy_{k+1} \\ &= 2xy_{k+1} - 2(k+1)y_k, \end{aligned}$$

這正是以 $k+1$ 代替 k 的關係。由歸納法，對所有 $n \geq 1$，$y_{n+1} = 2xy_n - 2ny_{n-1}$。

推論。 使用遞推關係兩次，一次在 n，一次在 $n+1$，使兩個乘積中都出現 $2xy_ny_{n+1}$ 這一項：

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 &= y_{n+1}(2xy_n - 2ny_{n-1}) = 2xy_ny_{n+1} - 2ny_{n-1}y_{n+1}, \\ y_ny_{n+2} &= y_n(2xy_{n+1} - 2(n+1)y_n) = 2xy_ny_{n+1} - 2(n+1)y_n^2. \end{aligned}$$

相減後，含 x 的項互相抵消：

$$y_{n+1}^2 - y_ny_{n+2} = 2(n+1)y_n^2 - 2ny_{n-1}y_{n+1} = 2n(y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}) + 2y_n^2,$$

此即所求的恆等式。

第 (iii) 部分

記 $D_n = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$。第 (ii) 部分的恆等式可寫成

$$D_{n+1} = 2nD_n + 2y_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

我們用歸納法證明對所有 $n \geq 1$，$D_n > 0$。當 $n = 1$ 時，

$$D_1 = y_1^2 - y_0y_2 = 4x^2 - (4x^2 - 2) = 2 > 0$$

對每個 x 都成立。若對某個 $n \geq 1$ 有 $D_n > 0$，則由於 $n \geq 1$，$2nD_n > 0$，又 $2y_n^2 \geq 0$，故 $D_{n+1} > 0$。因此對所有 $n \geq 1$ 及所有實數 x，$y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$，此即所求。

注意，要得到嚴格不等式，我們需要 D_n 嚴格為正：單靠 y_n^2 是不夠的，因為在 y_n 的零點上它可以等於零。

驗算

- 由遞推關係，$y_3 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x$。直接將 $z'' = (4x^2 - 2)z$ 微分，得 $z''' = (-8x^3 + 12x)z$，與 $-y_3z$ 吻合。
- 第 (i) 部分在 $n = 1$ 時：$y_1' = 2$，而 $2x \cdot 2x - (4x^2 - 2) = 2$。✓
- 第 (iii) 部分在 $n = 2$ 時：$D_2 = (4x^2 - 2)^2 - 2x(8x^3 - 12x) = 8x^2 + 4$，這是正數，並且等於 $2D_1 + 2y_1^2 = 4 + 8x^2$，與恆等式的預測一致。
- 以電腦在多個有理數 x 值（包括接近各 y_n 零點之處）檢驗遞推關係及不等式直至 $n = 14$，結果完全吻合。

常見錯誤

- 忘記歸納步驟要對 y_{k-1} 使用第 (i) 部分，而在 $k = 1$ 時這是指 y_0：題目只要求第 (i) 部分對 $n \geq 1$ 成立，所以要另外檢查 $n = 0$ 的情況。
- 在第 (iii) 部分只得出 $D_{n+1} \geq 0$：嚴格不等式來自 $D_n > 0$，而不是來自 y_n^2。

STEP 之外

函數 y_n 就是埃爾米特多項式（Hermite polynomials）$H_n(x)$，而關係式 $\mathrm{d}^n z/\mathrm{d}x^n = (-1)^n H_n z$ 是它們的羅德里格公式（Rodrigues formula）。它們在整條實數線上以 e^{-x^2} 為權函數正交（orthogonal），並給出量子諧振子（quantum harmonic oscillator）的能量狀態。第 (iii) 部分的不等式是一個圖蘭型不等式（Turán-type inequality），這類結果對

許多經典正交多項式都成立。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）透過級數解處理埃爾米特方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。