詳細解答

STEP III 2018，第 13 題

概率與統計 • 泊松分佈

> **STEP III 2018，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q13

關鍵思路

把 $t = -1$ 代入概率母函數（probability generating function），會令每個概率帶上符號 $(-1)^r$，所以把 $G(1)$ 和 $G(-1)$ 取平均，奇數項便互相抵消，只留下偶數項。用四次單位根（fourth roots of unity）$1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ 作同樣的篩選，就能抽出 4 的倍數。每個新的母函數一旦寫成閉合形式（closed form），平均值（mean）就只是它在 $t = 1$ 的導數，問題便化為比較幾個初等函數。

解答

記 $p_r = \mathrm{P}(X = r)$，於是 $G(t) = \sum_{r \geq 0} p_r t^r$。

偶數值。 把級數在 $t = 1$ 和 $t = -1$ 的值相加，

$$G(1) + G(-1) = \sum_{r \geq 0} p_r (1 + (-1)^r) = 2 \sum_{r \text{ 為偶數}} p_r,$$

因為當 r 為偶數時 $1 + (-1)^r$ 等於 2，當 r 為奇數時等於 0。兩邊除以 2 即得所求結果。（由於 $\sum p_r = 1$，兩個級數都絕對收斂（converge absolutely）。）

泊松（Poisson）分佈的母函數。 當 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^r / r!$ 時，

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{r \geq 0} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-t)},$$

這裏用了指數級數（exponential series），它對所有 t 都收斂。

第 (i) 部分

Y 的概率總和必須為 1，所以 k 是 $\mathrm{P}(X \text{ 為偶數})$ 的倒數。由第一個結果，

$$\mathrm{P}(X \text{ 為偶數}) = \tfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cosh\lambda, \qquad \text{所以} \qquad k = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}.$$

Y 的母函數只保留 G 的偶數項：

$$\begin{aligned} G_Y(t) = k\sum_{r \text{ 為偶數}} p_r t^r &= k\cdot\tfrac{1}{2}(G(t)+G(-t)) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{-\lambda t}) = \frac{\cosh\lambda t}{\cosh\lambda}, \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}(G(t)+G(-t))$ 是 G 的偶部（even part），與第一個結果完全一樣，只是以 t 代替 1。這正是所求的形式。

平均值為 $G_Y'(1)$：

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda} = \lambda\tanh\lambda.$$

當 $\lambda > 0$ 時有 $\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$，所以 $\sinh\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}) < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \cosh\lambda$，從而 $0 < \tanh\lambda < 1$。因此 $\mathrm{E}(Y) < \lambda$，得證。

第 (ii) 部分

現在我們只需保留 r 為 4 的倍數的項。

> ? **想一想** 當我們想按 4（而非 2）的倍數篩選時，甚麼擔當 $t = -1$ 的角色？

用全部四個四次單位根。對整數 r，

$$1+(-1)^r+\mathrm{i}^r+(-\mathrm{i})^r = \begin{cases} 4 & \text{若} 4 \mid r, \\ 0 & \text{其他情況.} \end{cases}$$

若 $4 \mid r$，每一項都是 1。若 r 為奇數，各項兩兩抵消：$(-1)^r = -1$ 且 $(-\mathrm{i})^r = -\mathrm{i}^r$。若 $r \equiv 2 \pmod 4$，各項為 $1+1-1-1 = 0$。所以

$$\sum_{4\mid r}\frac{x^r}{r!} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \tfrac{1}{2}(\cosh x+\cos x).$$

（也可以直接看出：$\cosh x = \sum_{r \text{ 為偶數}} x^r/r!$，而 $\cos x$ 的項相同，只是符號依次為 $+,-,+,\ldots$，所以兩者相加時，$4 \mid r$ 的項加倍，其餘的項抵消。）

取 $x = \lambda t$ 並乘以 $\mathrm{e}^{-\lambda}$，再以 $G_Z(1) = 1$ 這個要求定出 c，得

$$G_Z(t) = \frac{\cosh\lambda t+\cos\lambda t}{\cosh\lambda+\cos\lambda}.$$

當 $\lambda > 0$ 時分母為正，因為 $\cosh\lambda > 1 \geq -\cos\lambda$。求導後令 $t = 1$，

$$\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{\lambda(\sinh\lambda - \sin\lambda)}{\cosh\lambda + \cos\lambda}.$$

由於 $\lambda > 0$ 且分母為正，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) < \lambda &\iff \sinh\lambda - \sin\lambda < \cosh\lambda + \cos\lambda \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda > \sinh\lambda - \cosh\lambda = -\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} > 0.\end{aligned}$$

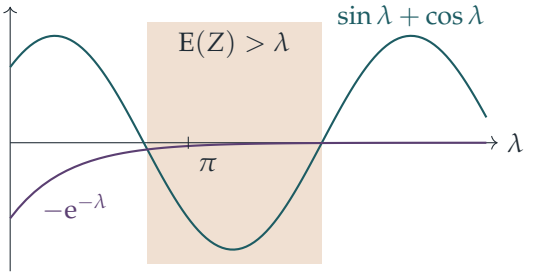
這在 $\lambda = \pi$ 時不成立：此時 $\sin\pi + \cos\pi + \mathrm{e}^{-\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\pi} < 0$，因為 $\mathrm{e}^{-\pi} < 1$。事實上

$$\mathrm{E}(Z)|_{\lambda=\pi} = \frac{\pi\sinh\pi}{\cosh\pi - 1} > \pi,$$

因為 $\sinh\pi > \cosh\pi - 1$（等價於 $1 > \mathrm{e}^{-\pi}$）。

所以答案是**否**：$\mathrm{E}(Z) < \lambda$ 並非對所有正數 λ 都成立。

若要看得更全面，可寫 $\sin\lambda + \cos\lambda = \sqrt{2}\sin(\lambda + \frac{\pi}{4})$。每當這條曲線跌到 $-\mathrm{e}^{-\lambda}$ 以下，條件便不成立。第一個這樣的區間大約由 $\lambda \approx 2.42$ 至 $\lambda \approx 5.49$，而隨着 $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$，之後的區間愈來愈接近 $(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2n\pi)$。



驗算

- 當 $\lambda \to 0$ 時，$\mathrm{E}(Y) = \lambda\tanh\lambda \approx \lambda^2$。這是合理的：$Y$ 幾乎總是 0，而 $\mathrm{P}(Y = 2) \approx \lambda^2/2$。
- 當 $\lambda \to \infty$ 時，$\tanh\lambda \to 1$，所以 $\mathrm{E}(Y)$ 略小於 λ。當 λ 很大時，泊松分佈很分散，所以捨棄奇數值幾乎不會改變平均值。
- 電腦直接對泊松級數求和，核實了每個母函數和兩個平均值。例如在 $\lambda = \pi$ 時，得到 $\mathrm{E}(Y) \approx 3.1299 < \pi$ 及 $\mathrm{E}(Z) \approx 3.4254 > \pi$。它亦找到 $\sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}$ 的變號點位於 $\lambda \approx 2.419$ 和 5.495。

常見錯誤

- 忘記歸一化常數（normalising constant）：單獨的 $\cosh \lambda t$ 並不是母函數，因為它在 $t = 1$ 的值不是 1。
- 以為 (ii) 的答案既然與 (i) 類似，就必定是「是」。只保留 4 的倍數，可能在 λ 以下移除的概率質量比以上的多，例如 $\lambda = \pi$ 時：最接近的容許值 4 在 π 之上，而且其概率遠大於 0 的概率。
- 把不等式除以 $\cosh \lambda + \cos \lambda$ 時，沒有先檢查它是否為正。

STEP 之外

把母函數在單位根上取平均，以抽出某一同餘類（residue class）中的項，這方法稱為*單位根濾波*（roots-of-unity filter），又稱級數的*多重分割*（multisection）。它是組合數學（combinatorics）的基本工具，也是離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）最簡單的情形。像本題這樣，把分佈以某事件為條件，再重新計算平均值，在概率論中隨處可見。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）深入講解了母函數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。