詳細解答

STEP III 2018，第 11 題

力學 • 鬆弛繩與拋體

STEP III 2018，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

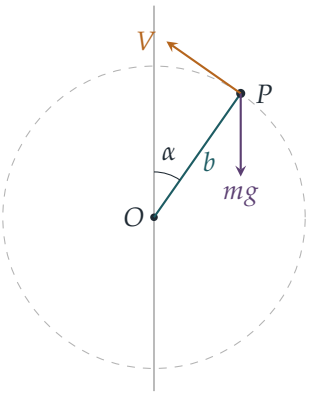
step.maths.org/questions/18-s3-q11

關鍵思路

當繩的張力（tension）降至零的一刻，繩便會變得鬆弛，所以該瞬間沿徑向的運動方程便給出 V。此後質點只是一個普通的拋射體（projectile），而當質點與 O 的距離回到 b 時，繩便再次拉緊。若採用以 O 為中心的坐標，這個條件會漂亮地化簡，因為拋射體由圓上出發，並沿切線（tangent）方向運動。最後一部分則歸結為：在急拉（jerk）的一刻，速度是否正好沿着繩的方向。

解答

我們把質點模擬為一個質量為 m 的質點，繫於一條輕而不可伸長（inextensible）的繩上，並忽略空氣阻力。取 O 為原點，x 為水平方向，y 為鉛直向上，並假設質點沿逆時針方向擺動，使繩在向上鉛直線右方的點 P 變得鬆弛。



在 P 點，繩與向上鉛直線成角 α，所以 $P = (b\sin\alpha,\ b\cos\alpha)$。該處的速度垂直於繩，方

向朝上並越過頂部：

$$\mathbf{v}_P = V(-\cos\alpha,\ \sin\alpha).$$

繩變得鬆弛時的速率

沿繩朝 O 的方向分解。張力 R 朝向 O；由於 P 在 O 之上，重力朝向 O 的分量亦為 $mg\cos\alpha$。質點在半徑為 b 的圓上運動，所以

$$R + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{b}.$$

當 $R = 0$ 時繩變得鬆弛，所以

$$V^2 = gb\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{gb\cos\alpha}.$$

繩何時再次拉緊

繩一旦鬆弛，質點便是一個拋射體。經過時間 t 後，其位置為

$$x = b\sin\alpha - Vt\cos\alpha, \qquad y = b\cos\alpha + Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $x^2 + y^2 = b^2$ 時，繩再次拉緊。展開得

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2\sin^2\alpha - 2bVt\sin\alpha\cos\alpha + V^2t^2\cos^2\alpha \\ &\quad + b^2\cos^2\alpha + V^2t^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 + 2bVt\sin\alpha\cos\alpha - bgt^2\cos\alpha - gVt^3\sin\alpha \\ &= b^2 + \left(V^2 - gb\cos\alpha\right)t^2 - gVt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4. \end{aligned}$$

含 t 的項互相抵消，因為質點起初沿切線方向運動；含 t^2 的項亦互相抵消，因為 $V^2 = gb\cos\alpha$。因此

$$x^2 + y^2 - b^2 = gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right).$$

當 $0 < t < 4V\sin\alpha/g$ 時，此式為負，所以質點嚴格位於圓內，繩保持鬆弛。此式在時間 T 再次等於零（其後變為正），其中

$$gT = 4V\sin\alpha,$$

此即所求。

拉緊前一刻的運動方向

在時間 T，速度的分量為

$$\dot{x} = -V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha - gT = V\sin\alpha - 4V\sin\alpha = -3V\sin\alpha.$$

所以質點正向左下方運動，而其路徑與水平所成的角 β 滿足

$$\tan\beta = \frac{|\dot{y}|}{|\dot{x}|} = \frac{3V\sin\alpha}{V\cos\alpha} = 3\tan\alpha,$$

此即所求。

靜止下來

想一想 速度要滿足甚麼條件，質點才會驟然停住？

急拉只會消去沿繩方向的動量（momentum）分量，垂直於繩的分量則不受影響。所以質點靜止下來，當且僅當該垂直分量本身已經為零，即當且僅當拉緊前一刻的速度平行於繩 $\overrightarrow{OQ}$，其中 Q 為質點在時間 T 的位置。（速度並非零，因為 $\dot{x} = -V\cos\alpha \neq 0$。）

利用 $V^2 = gb\cos\alpha$ 及 $T = 4V\sin\alpha/g$，

$$x(T) = b\sin\alpha - \frac{4V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = b\sin\alpha\,(1-4\cos^2\alpha),$$
$$y(T) = b\cos\alpha + \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{8V^2\sin^2\alpha}{g} = b\cos\alpha\,(1-4\sin^2\alpha).$$

向量 (x,y) 與 $(\dot{x},\dot{y})$ 平行，當且僅當 $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$。除以 $-bV$，得

$$3\sin^2\alpha\,(1-4\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha\,(1-4\sin^2\alpha) = 0.$$

設 $S = \sin^2\alpha$，則 $\cos^2\alpha = 1-S$ 及 $1-4\cos^2\alpha = 4S-3$：

$$\begin{aligned} 3S(4S-3) - (1-S)(1-4S) &= 0 \\ 12S^2 - 9S - (1-5S+4S^2) &= 0 \\ 8S^2 - 4S - 1 &= 0, \end{aligned}$$

所以 $S = \frac{1}{16}(4 \pm \sqrt{16+32}) = \frac{1}{4}(1\pm\sqrt{3})$。由於 $S = \sin^2\alpha > 0$，負根不可能成立，而餘下的根位於 $(0,1)$ 之內，所以它對應一個真正的銳角。以上每一步都是可逆的，所以當繩拉緊時質點瞬間靜止，當且僅當

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

驗算

- 公式 $V^2 = gb\cos\alpha$ 表明當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時 $V \to 0$：繩要在 O 的水平高度變得鬆弛，質點必須在該處已經停下，這是正確的。

- 當 $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$ 時，得 $\alpha \approx 55.7°$ 及 $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$，所以 $Q = \big(b\sin\alpha\,(\sqrt{3}-2),\ -\sqrt{3}\,b\cos\alpha\big)$，位於 O 的左下方。OQ 的斜率為 $\sqrt{3}\cot\alpha/(2-\sqrt{3})$，而路徑的斜率為 $3\tan\alpha$。兩者相符，因為

$$3(2-\sqrt{3})\tan^2\alpha = \frac{3(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}.$$

  以電腦模擬這個運動，三個結果均得到證實。

常見錯誤

- 只用能量來求 V：能量把 V 與初速聯繫起來，但以 b、g 及 α 確定 V 的，是張力為零的條件。
- 弄錯 P 點的速度方向。速度垂直於 OP，所以它與水平（而非鉛直）成角 α。
- 忘記證明 T 是繩首次拉緊的時間；因式分解（factorisation）$gt^3(\frac{1}{4}gt - V\sin\alpha)$ 正好說明了這一點。

STEP 之外

繩只能拉、不能推，所以鬆弛繩問題實際上是一個約束時有時無的受約束系統（constrained system）；同樣的單側約束（one-sided constraint）概念，亦出現於接觸力學（contact mechanics），以及帶不等式約束的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）之中。驟然的急拉是一種衝擊性約束力（impulsive constraint force），在大學一年級課程中會與碰撞及恢復係數（coefficient of restitution）一併討論。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對圓周運動和衝量都有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。