詳細解答

STEP III 2018，第 10 題

力學 • 複擺

> **STEP III 2018，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q10

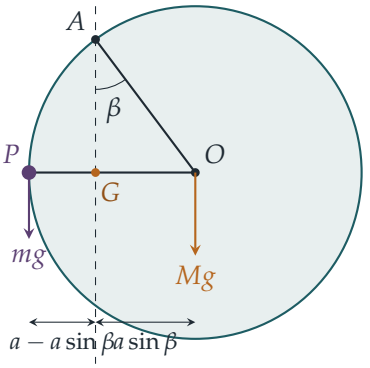
關鍵思路

圓盤與質點合起來構成單一個剛體（rigid body），繞固定軸 L 轉動，因此一切都由一個角度決定。在平衡時，整體的質心（centre of mass）必須位於 A 的正下方，這就是關於 A 的力矩（moment）平衡。至於運動，由於軸是光滑（smooth）的，該處的反作用力不做功，所以能量守恆（conservation of energy）。只要把能量寫成 θ 和 $\dot{\theta}$ 的函數，對它求導便得到運動方程（equation of motion），再把 $\sin\theta$ 換成 θ，便得出小幅振動（small oscillations）的結果。

解答

我們把圓盤模型化為均勻的剛性薄片（lamina），把質點視為固定在圓盤邊緣上的點質量（point mass），並假設軸 L 是光滑的。

平衡。 關於 A 有力矩的力只有兩個重力：作用於 O 的 Mg 和作用於 P 的 mg。A 處的反作用力通過 A。由於 AO 與向下的鉛垂線成角 β，O 位於 A 某一側、水平距離為 $a\sin\beta$ 之處，不妨設在右側。這樣重力 Mg 會令圓盤繞 A 順時針轉動，而只有 mg 能與之平衡，所以 P 必須在通過 A 的鉛垂線的左側。因為 OP 是水平的，長度為 a，所以 P 在 A 左方的水平距離為 $a - a\sin\beta$。（這裏 $a\sin\beta < a$，所以 P 確實在鉛垂線的左側。）



關於 A 取力矩，

$$Mg\,a\sin\beta = mg\,(a - a\sin\beta) \quad\Longrightarrow\quad \sin\beta = \frac{m}{M+m}.$$

O 和 P 都位於 A 下方、鉛垂距離為 $a\cos\beta$ 之處。所以在以 AP 為斜邊（hypotenuse）的直角三角形中，水平邊為 $a(1-\sin\beta)$，鉛垂邊為 $a\cos\beta$：

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2(1-\sin\beta)^2 + a^2\cos^2\beta = a^2\big(2 - 2\sin\beta\big) \\ &= 2a^2\Big(1 - \frac{m}{M+m}\Big) = \frac{2Ma^2}{M+m}, \end{aligned}$$

因此 $AP/a = \sqrt{2M/(M+m)}$，正如所求。

值得留意整體質心 G 的位置。它是 O 和 P 的加權平均（weighted average），所以位於線段 OP 上，即在 A 下方深度 $a\cos\beta$ 處。在平衡時它位於 A 的正下方，所以

$$AG = a\cos\beta.$$

能量守恆。 圓盤與質點作為一個剛體一起運動。在平衡時 OP 是水平的，而 OP 隨剛體一起轉動，所以當 OP 與水平線成角 θ 時，整個剛體已從平衡位置轉過了 θ。因此它的角速率（angular speed）為 $|\dot\theta|$。

? **想一想** 質點的速率是多少？

剛體上每一點都沿以軸為圓心的圓周運動。質點與 A 的距離恆為 AP，所以它的速率是 $AP\,|\dot\theta|$，動能（kinetic energy）為

$$\tfrac{1}{2}m\,AP^2\,\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot 2a^2(1-\sin\beta)\,\dot\theta^2 = (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2,$$

這裏用了上面得到的 $AP^2 = 2a^2(1-\sin\beta)$。圓盤的動能是 $\frac{1}{2}I\dot\theta^2$。

至於勢能（potential energy），可把總質量 $M+m$ 視為集中在 G。直線 AG 在平衡時是鉛垂的，它同樣轉過了 θ，所以 G 現在位於 A 下方深度 $a\cos\beta\cos\theta$ 處。以平衡位置為

勢能零點，

$$\text{勢能} = (M+m)g\big(a\cos\beta - a\cos\beta\cos\theta\big) = (M+m)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta).$$

軸是光滑的，而 A 處的反作用力作用在一個不動的點上，所以它不做功。唯一其他的力是重力，而重力是保守力（conservative force）。所以動能加勢能是常數：

$$\tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 + (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2 + (m+M)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta) = \text{常數},$$

這正是所求的結果。

小幅振動。 對 t 求導：

$$\dot\theta\Big[\big(I + 2(1-\sin\beta)ma^2\big)\ddot\theta + (M+m)ga\cos\beta\,\sin\theta\Big] = 0.$$

只要 $\dot\theta \neq 0$，方括號內的式子就必須為零；由連續性，它在每一時刻都為零。當 θ 很小時，$\sin\theta \approx \theta$，所以

$$\ddot\theta = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{(M+m)ga\cos\beta}{I + 2(1-\sin\beta)ma^2},$$

這是週期（period）為 $2\pi/\omega$ 的簡諧運動（simple harmonic motion）。

現在設 $m = \frac{3}{2}M$。那麼 $\sin\beta = \dfrac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$，又因為 β 是銳角，$\cos\beta = \frac{4}{5}$。分子為

$$\tfrac{5}{2}M\cdot ga\cdot\tfrac{4}{5} = 2Mga,$$

而以 $I = \frac{3}{2}Ma^2$ 代入，分母為

$$\tfrac{3}{2}Ma^2 + 2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{2}Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2 + \tfrac{6}{5}Ma^2 = \tfrac{27}{10}Ma^2.$$

所以 $\omega^2 = \dfrac{20g}{27a}$，週期為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27a}{20g}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a}{5g}} = 3\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}},$$

這裏用了 $\sqrt{27/20} = \sqrt{9\cdot 3/(4\cdot 5)} = \frac{3}{2}\sqrt{3/5}$。這就是所求的週期。

驗算

- 取 $m = 0$，得 $\sin\beta = 0$ 及 $AP/a = \sqrt{2}$。此時圓盤懸掛時 O 在 A 的正下方，而與 O 同高的邊緣點與 A 的距離確實是 $\sqrt{2}\,a$。週期變為 $2\pi\sqrt{(3a/2)/g}$，正是以邊緣上一點為支點的圓盤的熟悉結果。

- 動能各項相加得 $\frac{1}{2}(I + m\,AP^2)\dot{\theta}^2$，其中括號內是整個剛體關於 L 的轉動慣量（moment of inertia），理應如此。
- 以 $m = \frac{3}{2}M$ 及 $a = 0.5\,\text{m}$ 對該剛體進行逐步的電腦模擬，得到小幅振動週期為 $1.64815\,\text{s}$。公式給出 $3\pi\sqrt{1.5/49.05} \approx 1.64815\,\text{s}$。模擬亦顯示，即使擺幅很大，能量表達式仍保持不變。

常見錯誤

- 把 P 放在鉛垂線上與 O 同一側。這樣兩個重力會令剛體向同一方向轉動，不可能平衡。
- 用 a 而不是 AP 作為質點與軸的距離。質點是繞 A 而不是繞 O 作圓周運動。
- 分別計算 O 和 P 的勢能，結果在三角運算中迷失方向。改用與 A 相距 $a\cos\beta$ 的整體質心 G，計算會簡潔得多。

STEP 之外

這是一個複擺（compound pendulum）：任何繞固定軸擺動的剛體，其振動都如同一個長度為 $I_{\text{總}}/\big((M+m)h\big)$ 的單擺，其中 h 是軸到質心的距離。我們的能量方法是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的單變量情況：在拉格朗日力學中，運動方程由以單一廣義坐標（generalised coordinate）表示的動能和勢能得出。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體轉動和物理擺有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。