詳細解答

STEP III 2018，第 1 題

純數學 • 二次方程的根與不等式

> **STEP III 2018，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q1

關鍵思路

韋達定理（Vieta's formulas）把 u 和 v 的兩個對稱（symmetric）表達式都化為係數 α 和 β 的簡單函數。一旦固定其中一個表達式，就可以消去 α，另一個表達式便成為只含 β 的函數，而且正好是第 (i) 部分所描繪的兩個函數之一。u 和 v 為實數的條件（判別式（discriminant）≥ 0）則告訴我們可以使用曲線的哪一段，其餘的就交給草圖。

解答

第 (i) 部分

曲線 $y = \mathrm{f}(\beta)$。 求導，得

$$\mathrm{f}'(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta+1)(\beta^2 - \beta + 2)}{\beta^3},$$

其中我們看出了三次式的根 $\beta = -1$。二次因式的判別式為 $1 - 8 < 0$，所以它恆為正。因此唯一的駐點（stationary point）位於 $\beta = -1$，此時

$$\mathrm{f}(-1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

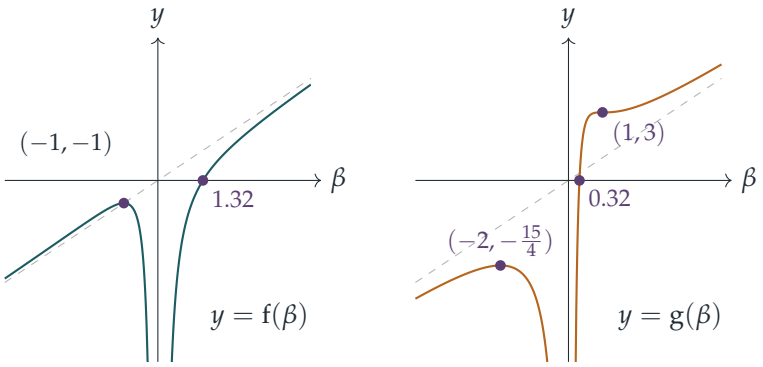
正負號：當 $-1 < \beta < 0$ 時，分子為正而 $\beta^3 < 0$，所以 $\mathrm{f}' < 0$；當 $\beta < -1$ 時兩者皆為負，所以 $\mathrm{f}' > 0$。因此 $(-1, -1)$ 是極大值（maximum）點，而且對每個 $\beta < 0$ 都有 $\mathrm{f}(\beta) \leq -1$。當 $\beta > 0$ 時各項皆為正，所以 f 在該處遞增（increasing）。

邊界的行為：當 $\beta \to 0$（從任一方向）時，$-1/\beta^2$ 一項起主導作用，所以 $\mathrm{f} \to -\infty$。當 $\beta \to \pm\infty$ 時，$\mathrm{f}(\beta) - \beta \to 0$，因此 $y = \beta$ 是斜漸近線（oblique asymptote）。曲線與軸相交一次，交點滿足 $\beta^3 - \beta - 1 = 0$，位於 $\beta \approx 1.32$。

曲線 $y = \mathrm{g}(\beta)$。 同樣地，

$$\mathrm{g}'(\beta) = 1 - \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 - 3\beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta-1)^2(\beta+2)}{\beta^3}.$$

駐點位於 $\beta = -2$，此時 $\mathrm{g}(-2) = -2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$；以及位於 $\beta = 1$，此時 $\mathrm{g}(1) = 3$。當 $-2 < \beta < 0$ 時 $\mathrm{g}' < 0$，當 $\beta < -2$ 時 $\mathrm{g}' > 0$，所以 $(-2, -\frac{15}{4})$ 是極大值點，而且對所有 $\beta < 0$ 都有 $\mathrm{g}(\beta) \le -\frac{15}{4}$。當 $\beta > 0$ 時，$\mathrm{g}' \ge 0$，且只在 $\beta = 1$ 時取等號：導數在該處不變號，所以 $(1,3)$ 是駐拐點（stationary point of inflection），而 g 在 $\beta > 0$ 上遞增。同樣地，當 $\beta \to 0$ 時 $\mathrm{g} \to -\infty$，$y = \beta$ 是漸近線，而且只有一個零點，位於 $\beta \approx 0.32$（即 $\beta^3 + 3\beta - 1 = 0$ 的根）。



虛線是漸近線 $y = \beta$。

第 (ii) 部分

由韋達定理，$u + v = -\alpha$ 及 $uv = \beta$（而由於 $\beta \ne 0$，故 $uv \ne 0$）。所以

$$u + v + \frac{1}{uv} = -\alpha + \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{u+v}{uv} + uv = \beta - \frac{\alpha}{\beta}.$$

第 (iii) 部分

條件 $-\alpha + \frac{1}{\beta} = -1$ 給出 $\alpha = 1 + \frac{1}{\beta}$。代入第二個表達式，

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \beta - \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \beta - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} = \mathrm{f}(\beta).$$

因此我們須證明對每個容許的 β 都有 $\mathrm{f}(\beta) \le -1$。

想一想 曲線 $y = \mathrm{f}(\beta)$ 趨向 $+\infty$，所以這個不等式不可能對所有 β 成立。是甚麼阻止 β 變得很大？

是 u 和 v 必須為實數。兩根為實數當且僅當 $\alpha^2 \geq 4\beta$，即

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq 4\beta \iff (\beta+1)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 \leq 0,$$

其中我們乘以了 $\beta^2 > 0$。現在 $\beta = 1$ 是這個三次式的根，而且

$$4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2+3\beta+1).$$

二次因式的判別式為 $9-16 < 0$，所以它恆為正。因此兩根為實數當且僅當 $\beta \leq 1$（且 $\beta \neq 0$）。

- 若 $\beta < 0$：由第 (i) 部分，$f(\beta) \leq f(-1) = -1$。
- 若 $0 < \beta \leq 1$：f 在 $\beta > 0$ 上遞增，所以 $f(\beta) \leq f(1) = 1-1-1 = -1$。

在所有情況下都有 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv \leq -1$，命題得證。等號在 $\beta = -1$（$\alpha = 0$，兩根為 ± 1）及 $\beta = 1$（$\alpha = 2$，重根（double root）-1）時成立。

第 (iv) 部分

現在 $-\alpha+\frac{1}{\beta} = 3$，所以 $\alpha = \frac{1}{\beta}-3$，而且

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv = \beta-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-3\right) = \beta+\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\beta^2} = g(\beta).$$

當 $\alpha^2 \geq 4\beta$ 時兩根為實數：

$$\left(\frac{1}{\beta}-3\right)^2 \geq 4\beta \iff (1-3\beta)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 \leq 0.$$

同樣，$\beta = 1$ 是一個根，而這次它是重根：

$$4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2-5\beta+1) = (\beta-1)^2(4\beta-1).$$

由於 $(\beta-1)^2 \geq 0$，這個三次式 ≤ 0 當且僅當 $\beta \leq \frac{1}{4}$ 或 $\beta = 1$。因此容許的值為 $\beta < 0$、$0 < \beta \leq \frac{1}{4}$，以及孤立的值 $\beta = 1$。

想一想 最大值是否就是區間右端的 $g(\frac{1}{4})$？

並不完全是：別遺漏那個孤立點。在三個部分上分別考慮：

- $\beta < 0$：由第 (i) 部分，$g(\beta) \leq -\frac{15}{4}$。
- $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$：g 遞增，所以 $g(\beta) \leq g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}+12-16 = -\frac{15}{4}$。
- $\beta = 1$：$g(1) = 3$。

所以 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv$ 的最大值是 $\boxed{3}$，在 $\beta = 1$、$\alpha = -2$，即 $u = v = 1$ 時取得。（事實上兩個表達式都等於 $1+1+1 = 3$。）若沒有那個重根，就不可能得到任何大於 $-\frac{15}{4}$ 的值。

驗算

- 把 $u = v = 1$ 代入兩個表達式：兩者皆為 3，與第 (iv) 部分吻合。代入 $u = v = -1$：兩者皆為 -1，即第 (iii) 部分取等號的情況。
- 在第 (iv) 部分試 $\beta = \frac{1}{4}$：$\alpha = 1$，而 $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$，所以 $u = v = -\frac{1}{2}$。於是 $u + v + \frac{1}{uv} = -1 + 4 = 3$ 及 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$，與所述相符。
- 用電腦在數千個給出實根的隨機 β 中搜尋，在第 (iii) 部分找不到任何大於 -1 的值，而在第 (iv) 部分除 $\beta = 1$ 外也找不到任何大於 -3.75 的值。

常見錯誤

- 忘記判別式條件，因而在第 (iii) 部分得出沒有上界的結論。
- 把 $(\beta - 1)^2(4\beta - 1) \leq 0$ 解成只有 $\beta \leq \frac{1}{4}$，遺漏了 $\beta = 1$，結果答案變成 $-\frac{15}{4}$ 而非 3。
- 把不等式 $\alpha^2 \geq 4\beta$ 乘以 β（它可能是負數），而不是乘以 β^2。

STEP 之外

這是一個小型的約束最優化（constrained optimisation）問題：我們在給出實根的係數集合上求函數的最大值，而這個集合除了區間之外，還可以包含孤立點。函數在一個集合上的最大值不一定出現在駐點或區間端點，這正是為何在分析和最優化中，仔細描述可行集（feasible set）如此重要。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對連續函數在一般集合上的極值有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。