詳細解答

STEP II 2018，第 9 題

力學 • 重力作用下的碰撞

> **STEP II 2018，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q9

關鍵思路

兩粒珠子（bead）的加速度始終相同，都是向下的 g，所以兩者之間的相對運動是等速的。A 反彈之後，兩珠之間的距離以恆定速率縮小，由此即可求出碰撞所需的時間。最後一部分則純粹是能量與動量的計算：知道 A 撞到地面時的速率，就知道它離開碰撞時的速率，其餘交給牛頓實驗定律（Newton's experimental law）便可。

解答

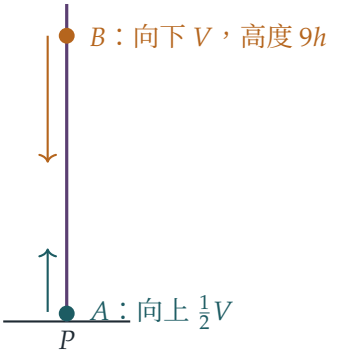
我們把兩粒珠子視為質量同為 m 的質點（particle），套在一條光滑（smooth）的豎直金屬線上，並忽略空氣阻力，因此在兩次撞擊之間，每粒珠子都只受重力作用而自由運動。取向上為正方向，高度由 P 起量度。

直至第一次反彈

A 由靜止下落 $8h$，故由能量守恆（conservation of energy）得

$$V^2 = 2g(8h) = 16gh, \qquad V = 4\sqrt{gh}.$$

在同一段時間內，B 亦由靜止下落了 $8h$（運動完全相同），所以此刻 B 位於高度 $17h - 8h = 9h$，以速率 V 向下運動。A 從地面以速率 $\frac{1}{2}V$ 向上反彈。



碰撞

從 A 離開地面的一刻起，兩粒珠子的加速度都是 $-g$，因此 B 相對於 A 的速度一直保持其初始值

$$(-V) - \tfrac{1}{2}V = -\tfrac{3}{2}V.$$

想一想 為甚麼計算兩珠何時相遇時可以不理會重力？

重力令兩者的速度改變相同的量 $-gt$，所以在兩者之差中互相抵消。於是 $9h$ 的距離以恆定速率 $\frac{3}{2}V$ 縮小，碰撞發生在反彈後

$$\tau = \frac{9h}{\frac{3}{2}V} = \frac{6h}{V} = \frac{6h}{4\sqrt{gh}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

的時刻。（我們還需要 A 在那時仍在空中；稍後會看到確實如此。）此時 A 的高度為

$$H = \tfrac{1}{2}V\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = 2\sqrt{gh}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{9h}{4g} = 3h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h,$$

正如所求。碰撞前一瞬間，

$$\text{速度：}A = \tfrac{1}{2}V - g\tau = 2\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh},$$
$$\text{速度：}B = -V - g\tau = -4\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = -\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}.$$

所以 A 仍在上升，而且

$$u_A = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh}\,(\text{向上}),\qquad u_B = \tfrac{11}{2}\sqrt{gh}\,(\text{向下}).$$

驗算一下：B 的高度為 $9h - V\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 9h - 6h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h$，同樣吻合。

恢復係數

設 e 為兩珠之間的恢復係數（coefficient of restitution），並設 v_A、v_B 為兩者在碰撞後一瞬間的速度（向上為正）。暫且以 $\sqrt{gh}$ 為單位，於是 $u_A = \frac{1}{2}$ 向上，$u_B = \frac{11}{2}$ 向下。

動量（momentum）（兩者質量相等，而在瞬間發生的碰撞中，重力的衝量（impulse）可以忽略）：

$$v_A + v_B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{2} = -5.$$

牛頓實驗定律：兩珠以速率 $\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 6$ 互相接近，碰撞後位於上方的 B 以此速率的 e 倍與 A 分離：

$$v_B - v_A = 6e.$$

兩式相減，得 $v_A = -\frac{1}{2}(5+6e)$，所以 A 以速率 $w = \frac{1}{2}(5+6e)\sqrt{gh}$ 向下運動。

現在 A 從高度 $\frac{15}{8}h$ 以初速率 w 下落，並以速率 V 到達地面（它在 B 下方，且向下運動得較快，因為 $v_B = -5 - v_A = \frac{1}{2}(6e-5) > v_A$，所以兩珠不會在此之前再次相遇）。由能量守恆，

$$V^2 = w^2 + 2g \cdot \tfrac{15}{8}h \quad \Longrightarrow \quad w^2 = 16gh - \tfrac{15}{4}gh = \tfrac{49}{4}gh,$$

故 $w = \frac{7}{2}\sqrt{gh}$。於是 $\frac{1}{2}(5+6e) = \frac{7}{2}$，得

$$e = \frac{1}{3}.$$

碰撞後，A 以 $\frac{7}{2}\sqrt{gh}$ 向下運動，B 以 $\frac{3}{2}\sqrt{gh}$ 向下運動。

驗算

- 動能（kinetic energy）：碰撞前總動能為 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{1}{4} + \frac{121}{4}) = \frac{61}{4}mgh$；碰撞後為 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{49}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{29}{4}mgh$。能量有所損失，這正是 $e < 1$ 時應有的情況。
- 若 $e = 1$（且質量相等），兩珠會直接交換速度，於是 A 會以 $\frac{11}{2}\sqrt{gh}$ 離開，著地時速率大於 V；若 $e = 0$，兩珠會以 $\frac{5}{2}\sqrt{gh}$ 一同運動，A 著地時速率會較小。$\frac{1}{3}$ 這個數值合理地介乎兩者之間。
- 以電腦逐步模擬整個運動（取 $g = h = 1$），得出碰撞發生在高度 1.875，兩者速率分別為 0.5 和 5.5；並且在 $e = \frac{1}{3}$ 時，第二次著地的速率為 $4 = V$。

常見錯誤

- 忘記在 A 下落期間 B 也一直在下落：反彈時 B 位於 $9h$，而不是 $17h$，而且已經以速率 V 運動。
- 牛頓定律中的正負號錯誤：所有速度都應以同一個正方向表示，並檢查得出的分離速率是否為正。

STEP 之外

在其中一粒下落珠子的參考系（frame）中考慮問題，這個技巧讓我們初嚐伽利略相對性（Galilean relativity）的滋味：在均勻重力場中，自由下落的參考系完全感受不到重力，而這正是愛因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的出發點。大學一年級力學中的碰撞問題，通常在質心參考系（centre-of-mass frame）中求解；在這個參考系中，恢復係數為 e 的撞擊只不過是把兩個速度反向，並乘以 e。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這兩個概念都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。